Jutta Schäfer

Ulrike Bopp-Schultheiß

unter Mitarbeit von

Tanja Baumhauer und

Katrin Scheel

Handreichung

für die ersten
Wochen und Monate
im Anfangsunterricht
Mathematik

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Fakultät für Sonderpädagogik
Förderschwerpunkt Lernen

Staatliches Schulamt Tübingen
Beauftragte für Gemeinsamen Unterricht

Umschlag und Titelbild: Birke Christ

Reutlingen, im Januar 2013
2., erweiterte und überarbeitete Auflage 2014

Dank und Widmung

Diese Handreichung widmen wir
den mehr als 300 Schulkindern aus dem Schulamtsbezirk Tübingen/Reutlingen,
ihren Lehrerinnen, Schulleitungen und den beteiligten Studierenden.
Sie alle haben maßgeblich zum Gelingen des Projekts
„Teile-Ganzes-Verständnis von Anfang an" beigetragen.

Ein besonderer Dank gilt dem Schulamt Tübingen
für die unkomplizierte und gewinnbringende Unterstützung.
Gedankt wird insbesondere Frau Ulrike Bopp-Schultheiß, der Beauftragten
für Gemeinsamen Unterricht, die das Projekt während aller Phasen
unterstützt und vorangebracht hat.

Ein herzlicher Dank gilt Melanie Haag, Kathrin Hoffmann,
Andrea Kästle und Friederike Schwarz.
Sie haben im Tagespraktikum im Wintersemester 20010/11 zahlreiche ansprechende
Fördermaterialien erstellt, die in der Handreichung vorgestellt werden.

Ein weiterer Dank gilt der
Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg, vor allem
der Fakultät für Sonderpädagogik in Reutlingen,
die durch eine großzügige Finanzierung
die Realisierung der Handreichung ungemein erleichtert hat.

Ein besonders herzlicher Dank
geht an Hans-Dieter Gerster und Rita Schultz
von der Pädagogischen Hochschule Freiburg
sowie an den Kreis der Lernberaterinnen aus Freiburg,
allen voran Elfriede Jakob.
Von ihnen stammen überaus wertvolle Anregungen,
die an vielen Stellen Eingang
in diese Handreichung gefunden haben.

Vorwort zur ersten Auflage

Vorliegende Handreichung entstand im Jahr 2012 im Rahmen eines innovativen Praktikumskonzepts an der Fakultät für Sonderpädagogik der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg. Hintergrund des Projekts ist die frühzeitige Diagnose und Förderung von Schulanfängern im Bereich des Mathematikunterrichts in heterogenen Gruppen. Im Rahmen des Projekts ergab sich eine überaus gewinnbringende Kooperation aus Forschung, Theorie und Schulpraxis. Studierende der Sonderpädagogik entwickelten, unter der Schirmherrschaft von Schulamt und Pädagogischer Hochschule, Förderkonzepte, die sie wöchentlich in der Schulpraxis erprobten und in entsprechenden Begleitveranstaltungen an der Fakultät für Sonderpädagogik reflektierten und weiterentwickelten.

Das „Freiburger Screening (Mathematik) für Schulanfänger“ wurde in Kooperation mit dem Kreis der LernberaterInnen Freiburg und einer der Autorinnen (JS) entwickelt. Dabei handelt es sich um ein beobachtungsgestütztes Screeningverfahren zur Erfassung des Teile-Ganzes-Verständnisses von Schulanfängern für Gruppen von bis zu acht Schulkindern. Das aus vier Aufgabenbereichen bestehende diagnostische Instrument erfasst diejenigen Lernvoraussetzungen, die bedeutsam sind für Lernumgebungen, welche auf dem Teile-Ganzes-Konzept basieren. Ziel ist es, besonderen Förderbedarf von Schulanfängerinnen und -anfängern in heterogenen Lerngruppen im Fach Mathematik frühzeitig zu erkennen und darauf zu reagieren.

Im Rahmen des Projekts Teile-Ganzes-Verständnis von Anfang an (TGV-A) wurde das Screeningverfahren im Schuljahr 2012/13 in Kooperation mit dem Staatlichen Schulamt Tübingen an 15 Schulen erprobt. Im Rahmen ihrer schulpraktischen Studien führten je zwei Studierende des Lehramts Sonderpädagogik nach den Herbstferien gemeinsam mit Sonderschul- und Regelschullehrkräften, die entsprechende Fortbildungsangebote an der Fakultät für Sonderpädagogik wahrgenommen hatten, das Verfahren durch und werteten es aus. Ein deutlich erhöhter Förderbedarf zeigte sich bei knapp 6 % der überprüften Schulanfänger. Für diese Gruppe entwickelten und erprobten die Studierenden im Team wöchentlich für die Dauer eines Semesters individualisierte Fördermaßnahmen. Parallel hierzu fanden an der Fakultät für Sonderpädagogik und in Kooperation mit der Beauftragten für Gemeinsamen Unterricht des Schulamts Tübingen regelmäßig entsprechende Begleitveranstaltungen für teilnehmende Studierende und Lehrkräfte statt. Aus dieser Arbeit heraus entstand der Wunsch nach einer kompakten Handreichung, in der Fördervorschläge und diagnostische Aufgabenstellungen für die ersten Wochen und Monate des Anfangsunterrichts Mathematik, wie sie im Rahmen des Projekts neu entwickelt oder eingesetzt wurden, theoriegeleitet dargestellt und reflektiert werden. Der Kreativität und dem Engagement aller Beteiligten ist es zu verdanken, dass dieser Vorschlag zeitnah realisiert werden konnte.

Wir wünschen uns und allen beteiligten Personen, dass die Handreichung wertvolle Hinweise zur Planung und Realisierung von Unterricht, Diagnose und Förderung in Klassen mit heterogenen Lerngruppen liefern und zur Qualitätssteigerung des Mathematikunterrichts in Eingangsklassen beitragen kann.

Jutta Schäfer und Ulrike Bopp-Schultheiß

Ausgehend von Erkenntnissen aus Fachdidaktik und Entwicklungspsychologie wird in dieser Handreichung ein Überblick über die Entwicklung von Teile-Ganzes-Verständnis, Mengenverständnis, Zahl- und Operationsverständnis im frühen Kindesalter gegeben.

In allen Kapiteln finden Sie neben theoretischen Ausführungen auch Anregungen zu diagnostischen Aufgabenstellungen sowie praxiserprobte konkrete Vorschläge und Hinweise zur Förderung. Anhand von Blitzblickübungen werden durchgehend, das heißt für jeden der vorgestellten Bereiche, sinnvolle Fördermöglichkeiten vorgestellt. Kopiervorlagen für einen Teil der von den beteiligten Studentinnen erstellten Materialien sowie für das Arbeiten mit Logischen Blöcken (Merkmalkärtchen, Spielpläne) können angefordert werden bei Prof. Dr. Jutta Schäfer (jutta.schaefer@ph-ludwigsburg.de).

Die Bezeichnung „Menge“ wird in dieser Handreichung in Anlehnung an Krajewski (2008) zumeist umgangssprachlich verwendet. „Mengenvergleich“ und „Mengengleichheit“ beziehen sich stets auf die *Anzahl* der Elemente: „Gleiche“ Mengen sind demnach nicht identisch, sondern enthalten gleich viele Elemente (Dinge, Objekte, …).

1. Blitzblickübungen

Die Fähigkeit, Gruppierungen und kleine Anzahlen auf einen Blick nichtzählend zu erkennen, wird seit Ende des vorletzten Jahrhunderts wissenschaftlich untersucht (vgl. Gast 1954 und 1957, Schäfer 2005). Den Begriff „Blitzblick“ prägte Käthe Weichbrodt, die die Bedeutung der Fähigkeit zur Simultanerfassung für die Schulleistung aufgriff und eine Methode zum Überprüfen entwickelte (Weichbrodt 1984). Weichbrodt stellte bei einer Untersuchung von mehr als einhundert ABC-Schützen fest, dass die meisten Schulanfänger bereits bis zu vier Objekte auf einen Blick erfassen. Allerdings fand sie auch Kinder, die zu Beginn ihrer Schulpflicht nur Mengen bis zwei richtig benennen konnten und bereits ab drei erste Unsicherheiten zeigten. Bei diesen Kindern bestätigte sich nach ihrer Erfahrung stets der Verdacht auf einen stark erhöhten Förderbedarf. Die Autorin stellte darüber hinaus fest, dass Kinder, die bei Schuleintritt nur Mengen bis drei erfassen konnten, sowohl beim Erwerb mathematischer Kompetenzen als auch beim Schriftspracherwerb erheblichen Förderbedarf aufwiesen. Geübte Leser zerlegen Wörter beim Lesen rasch in simultan erfassbare Gruppierungen von Buchstaben im Sinne von Wortbausteinen und Silben. Einigen Kindern steht diese Fähigkeit zum Erfassen von Gruppierungen jedoch nicht in altersentsprechender Weise zur Verfügung, was nicht nur das mathematischer Lernen, sondern auch den Leseprozess erschweren kann. (Fischer & Schäfer 2002, 52).

Studienarbeiten zeigten allerdings, dass sich die Simultanerfassungsfähigkeit, die von Naturwissenschaftlern und Gestaltpsychologen auch als Fähigkeit zur Gruppierung bezeichnet wird, gut fördern lässt (vgl. Kieber 2002). Die Methode hierzu nennen wir „Blitzblick“, in Anlehnung an Weichbrodt. Andere Autoren sprechen mittlerweile von „Zahlenblick“ (Rechtsteiner-Merz 2012, 85), was jedoch das Missverständnis nahelegt, es sei vorrangiges Ziel dieser Übungen, den Blick für geschriebene Zahlen (Zifferndarstellungen) zu schulen. Um sich davon abzugrenzen, verwenden die Autorinnen dieser Handreichung weiterhin den Begriff „Blitzblick“.

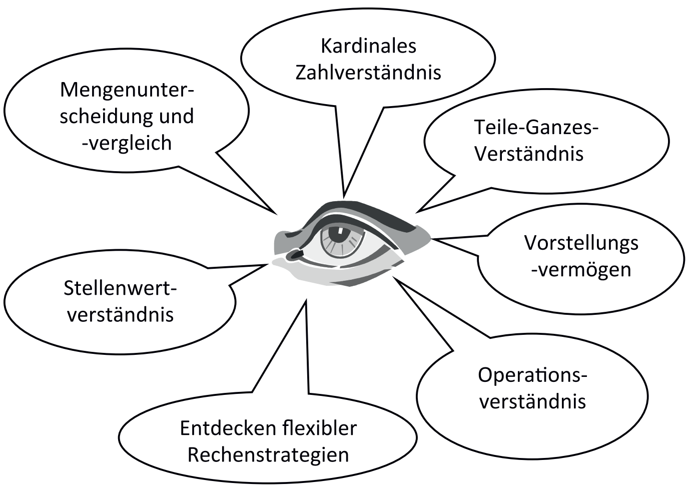


Abb. 1: Teilbereiche der Blitzblickübungen

Blitzblickübungen können in unterschiedlichen Teilbereichen, zum Beispiel zur Zahlauffassung und Zahlzerlegung, in unterschiedlichen Zahlenräumen oder zu den vier Grundrechenarten durchgeführt werden. Diese Bereiche sind in Abbildung 1 dargestellt. In den folgenden Ausführungen werden sie konkretisiert und durch weiterführende Übungsvorschläge ergänzt.

Methodik der Blitzblickübungen

Die Fähigkeit zur Simultanerfassung ist entwicklungsbedingt und erst beim jungen Erwachsenen voll ausgebildet (Fischer & Schäfer 2002). Viele Kinder können bei Schuleintritt bereits Mengen bis 4 nichtzählend erfassen. Allerdings gibt es auch Kinder, die schon beim Erfassen der Anzahlen 2 oder 3 unsicher sind. Auf das Erkennen gerade dieser Kinder muss im Anfangsunterricht besonderer Wert gelegt werden, da die meisten strukturierten Anschauungsmittel, die beim Erstrechnen eingesetzt werden, sich nur dann unterstützend auf das Rechnenlernen auswirken, wenn Kinder die dargestellten Anzahlen nicht immer wieder neu abzählen müssen.

Blitzblickübungen wurden unter anderem von Gerster, gestützt auf van de Walle (2004), beschrieben. Anfangs bestanden sie ausschließlich darin, Kindern für kurze Zeit räumliche Anordnungen oder flächige Abbildungen kleiner Anzahlen von Objekten, Punktemustern usw. vorzulegen oder auf Bildschirmen einzublenden. Aufgabe der Kinder ist, möglichst schnell und fehlerlos die korrekte Anzahl und/oder ihre Zusammensetzung zu erkennen. Dazu müssen Kinder ihre Aufmerksamkeit für kurze Zeit fokussieren. Sie lernen dabei auch, den Blick willentlich kurzzeitig auf eine bestimmte Stelle zu richten und diese zu fixieren. Außerdem muss das gesehene Bild für kurze Zeit im Gedächtnis behalten werden. Blitzblickübungen dienen somit nicht nur einer raschen Zahlauffassung; sie sind auch Blicktraining und fördern überdies Aufmerksamkeit, Gedächtnis und Konzentration.

Willentliches Fixieren nach Anweisung ist für viele Schulanfänger ungewohnt und muss zunächst eingeübt werden. Um sicher zu gehen, dass alle Schüler die Aufgabe beim Blitzblicken sehen, empfiehlt es sich, die Vorderseite der Aufgabenkarten mit einfachen, gut erkennbaren Bildern oder Symbolen zu versehen. Fordern Sie die Schüler auf, zum Beispiel genau „auf die *Sonne*“ zu schauen. Vergewissern Sie sich, dass alle Kinder auf die Symbolseite blicken. Drehen Sie dann die Karte um mit den Worten **„Achtung Blitzblick!“** und wieder zurück in die Ausgangsposition, so dass die *Aufgabenseite* kurz sichtbar ist. Durch die Ankündigung „Achtung Blitzblick!“ wird einerseits die Aufmerksamkeit der Kinder angesprochen und außerdem die Zeitspanne zum Anschauen der Objekte vorgegeben.

Auch wenn die Präsentationszeit beim Training gerade für die Anzahlerfassung anfänglich sehr kurz scheint, zeigte sich, dass eine längere Präsentationsdauer Kinder in der Trainingsphase tendenziell verunsichert und zu mehr Fehlern führt. Im Bemühen, alles ganz richtig zu machen, verzählen Kinder sich dann häufig, statt sich auf ihre Wahrnehmung zu verlassen, die gerade im kleinen Zahlenraum oft präziser ist als das Zählen.

Nicht für jedes Kind ist es selbstverständlich, dass (unbewegte, statische) Bilder bisweilen nützliche Informationen enthalten, die mit einem kurzen und konzentrierten Blick erfasst werden können. Manchmal ist es deshalb wichtig, mit Kindern ein solches „Anschauen“ und „Hinsehen“ zu üben, bevor Blitzblickübungen beispielsweise zum Bezeichnen oder Vergleichen von Quantitäten oder zum Erfassen von Anzahlen eingesetzt werden. Ziel dieser „Vorübungen“ ist unter anderem, dass Kinder lernen, mehr oder weniger abstrakte Informationen aus Bildern und Abbildungen zu entnehmen, diese im Kurzzeitgedächtnis zu speichern und anschließend darüber nachzudenken. Dabei kommt es noch nicht darauf an, Anzahlen zu erfassen. Verlangt wird ein unterscheidendes Vergleichen, das zugleich eine Bedingung für das Klassifizieren darstellt.

Langfristig möchte man durch Blitzblickübungen erreichen, dass Kinder mentale Vorstellungsbilder („innere Bilder“) der betreffenden Quantitäten und Operationen aufbauen. Das bedeutet, dass sie nicht mehr darauf angewiesen sind, sich Anzahlen, Zahlzerlegungen oder Rechnungen allein durch Abzählen oder Aufsagen der Zahlwortreihe zu vergegenwärtigen. Dadurch wird es Kindern zunehmend erleichtert, in der Vorstellung mit Anzahlen zu handeln, sie zum Beispiel zu zerlegen, zu vereinigen, zu ergänzen, zu verdoppeln usw. So entdecken Kinder mit der Zeit heuristische Rechenstrategien, die subjektiv als „schnell“ und „einfach“ erlebt werden, da sie unter anderem Zeit sparen und das Arbeitsgedächtnis entlasten. Schließlich kann das scheinbar Sicherheit vermittelnde zählende Rechnen mehr und mehr durch effizientere Strategien abgelöst werden.

Bei Blitzblickübungen kann man einen **Lern- und einen Übungs- bzw. Trainingsteil** unterscheiden.

Übung und Training arbeiten mit Zeitlimits und erfordern im klassischen Sinn einen „Blitzblick“. Die Präsentationen werden eingeleitet und beendet durch die Ansage: „Achtung Blitzblick!“, die zugleich das Zeitlimit vorgibt.

Der **Lernteil** dagegen findet in einer ruhigen, beinahe meditativen Atmosphäre statt, während der die Darstellungen aufmerksam betrachtet und analysiert werden. Zum Beispiel wird bei Übungen zum Erfassen von Anzahlen gemeinsam darüber nachgedacht, wie man Anzahlen und deren Zusammensetzungen auf einen Blick rasch und mühelos erkennen kann, auch wenn die Zeit zu kurz zum Zählen ist.

Dadurch dass Schüler ihre Erkenntnisse verbalisieren und im Klassengespräch miteinander austauschen, erfährt die Lehrkraft, welche Teile, Beziehungen usw. bereits von ihnen erkannt, erfasst und wahrgenommen werden, das heißt bedeutsam geworden sind, und worauf sie in den weiteren Übungen besonderen Wert legen sollte. Durch den Austausch im Unterrichtsgespräch erfolgt ein bewusstes Reflektieren und Bewerten individueller Strategien. Wichtig dabei ist, dass Vor- und Nachteile einzelner Strategien gegeneinander abgewogen werden. Ein solcher Austausch eröffnet gerade auch langsamer arbeitenden Kindern mit beschränktem Handlungsrepertoire die Möglichkeit, von anderen Kindern zu lernen und deren Strategien im angstfreien Raum einmal selbst auszuprobieren.

Wichtig ist, dass immer gefragt wird:

„Wie hast du das so schnell gesehen?“

„Wer hat es anders gesehen?“ oder

„Könnte man es auch noch anders sehen?“

Im Rahmen dieses Kapitels werden Überlegungen zur Bedeutung von Teile-Ganzes-Vorstellungen als Brückenglied für den Erwerb einer sicheren Rechenfertigkeit angestellt.

Ein Ganzes oder „das Ganze" bezeichnet diskrete Objekte oder Kollektionen (Sets) von Objekten bzw. Dingen, Lebewesen oder Personen, den „Teilen" des Ganzen. „Das Ganze" kann aus ein oder mehreren Teilen bestehen, die ihrerseits wieder „Ganze" sind.: Eine Familie (ein Ganzes) besteht aus Familienmitgliedern wie Vater, Mutter, Kind (den Teilen) und ist als solche Teil eines größeren Familienverbands (eines anderen Ganzen). Stets geht es darum, dass und wie „das Ganze" und seine (Bestand)-Teile in Beziehung stehen und es sind diese *Beziehungen*, durch die ein Ganzes sich konstituiert. Die *Beziehung* der Teile zum Ganzen ist als solche nicht sinnlich wahrnehmbar, sondern muss vom Individuum, ob Betrachter oder Hörer, konstruiert werden. Dabei ist hervorzuheben, dass das Ganze nicht nur *mehr* ist als die Summe seiner Teile, sondern „*etwas anderes* … Es kommen nicht etwa nur zu den - unveränderten - Teilen Gestaltqualitäten hinzu, sondern alles, was zu einem Teil eines Ganzen wird, nimmt selbst neue Eigenschaften an" (Metzger 1975).

Abb. 2: Teile-Ganzes-Verständnis und Rechenfertigkeit

Teile-Ganzes-Beziehungen existieren in zahllosen Feldern. Sie finden sich unter anderem in der bildenden Kunst, der Musik und der Schriftsprache – zum Beispiel im Zusammenhang von Buchstaben und Wörtern, aber auch wenn es um Beziehungen zwischen Wörtern und Sätzen geht. In der Mathematik findet man Teile-Ganzes-Beziehungen beispielsweise im Bereich mehrstelliger Zahlen, zusammengesetzter Flächen oder Körper sowie beim Bruch-, Prozent- und Zinsrechnen.

Ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts der ersten Schuljahre ist der Aufbau sicherer Rechenfertigkeiten[1] innerhalb der vier Grundrechenarten und im Bereich der Natürlichen Zahlen. Rechenfertigkeit umschließt die beiden grundlegenden Bereiche sichere Zahlvorstellungen und Operationsverständnis der Grundrechenarten, die ihrerseits als Fähigkeiten, im Sinne von Voraussetzungen betrachtet werden. Beide Bereiche verbindet das Verständnis von Teile-Ganzes-Beziehungen. Grundlage für ein numerisches, das heißt anzahlbezogenes Teile-Ganzes-Verständnis ist ein Verstehen protonumerischer, mengenbezogener Vorstellungen. Dieses wird in der oben stehenden Abbildung bezeichnet als „Prä-“ numerische Kompetenzen und Mengenverständnis.

3. Protonumerisches[2] Teile-Ganzes-Verständnis

In den folgenden Ausführungen werden Aspekte eines protoquantitativen (vorzahligen) Teile-Ganzes-Konzepts erläutert. Dieses wird vom kleinen Kind noch lange Zeit nicht mit Zahlen in Verbindung gebracht, die größer sind als 3 oder 4.

3.1 Anmerkungen zur Pränumerik

„Pränumerische“ Übungen wurden gerade in der Sonderpädagogik häufig als „Vorbedingung“ für den Erwerb mathematischen Verständnisses betrachtet. Dies ist aufgrund neuer fachdidaktischer Erkenntnisse so nicht länger haltbar (vgl. Moser Opitz 2007, 255). Pränumerische und numerische Denkstrukturen entwickeln sich parallel zueinander und beeinflussen einander wechselseitig. Sie sollen darum auch parallel gefördert werden. Das heißt, Kinder sollen im Alltag einer „Welt der Zahlen“ begegnen und sich damit auseinander setzen, auch wenn sie über bestimmte Konzepte noch nicht vollständig verfügen, zum Beispiel über das Verständnis der Mengeninvarianz. Falsch oder zumindest problematisch ist es daher, Kinder von Zahlen fern zu halten, nur weil sie bestimmte pränumerische Aufgabenstellungen (noch) nicht beherrschen.

Insbesondere für die Förderung lernschwacher Schülerinnen und Schüler betonen Moser Opitz und Scherer (2010), dass pränumerische Aufgaben nicht länger als Vorläuferfertigkeiten des Zahlbegriffs betrachtet werden dürfen, sondern dass das Ordnen, Zuordnen, Sortieren und Vergleichen von Mengen parallel zum Arbeiten mit Zahlen gefördert werden sollte und auch mit numerischen Inhalten in Verbindung zu bringen ist.

Kinder sollten Bauklötze, Spielfiguren und anderes Material nicht nur nach figurativen Merkmalen sortieren oder ordnen, sondern sich parallel dazu stets auch mit anzahlbezogenen Fragestellungen beschäftigen wie: „Wie viele sind es?“, Sind es mehr runde oder mehr eckige Plättchen?“, „Gib mir drei rote Klötze“.

---

[1] „Können“ schließt beides ein, Fähigkeit und Fertigkeit. „Fähigkeiten“ sind Voraussetzung für die Performanz beziehungsweise das Ausüben von Fertigkeiten. Fertigkeiten sind beispielsweise Stricken, Klavierspielen, Bogenschießen aber auch Lesen, Schreiben, Rechnen, Sprechen. Fähigkeiten entwickeln sich, bedürfen hierzu aber einer anregenden Umgebung. „Fertigkeiten“ werden erworben und können durch Übung und Training verbessert werden. Eine grundsätzliche Fähigkeit, das Rechnen zu erlernen, wenn auch möglicherweise nur das Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 10 oder 20, wird in dieser Handreichung für alle Kinder angenommen und soll hier nicht diskutiert werden.

[2] vorzahliges

3.2 Groß oder klein? Viel oder wenig?

Mit zunehmendem Alter entwickeln Kleinkinder ein Interesse daran, Gegenstände und Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit zu bezeichnen und zu unterscheiden. Zunächst werden dazu grobe Kategorien verwendet, Begriffe wie „groß“ und „klein“ oder „viel“ und „wenig“. Diese werden dann zunehmend verfeinert: „riesengroß“ oder „klitzeklein“. Erst zu einem späteren Zeitpunkt verwendet das Kind Komparative, das heißt *vergleichende* Bezeichnungen (größer als, noch größer, am größten) (vgl. Oerter & Montada 1998, 533).

Kühnel (1966) bezeichnet eine unbestimmte *„Vorstellung einer Vielheit“* als *ersten Zahlbegriff des kleinen Kindes* und macht darauf aufmerksam, dass seine Entwicklung stets mit einer *„besondere(n) Gefühlsbetonung verbunden“* ist. Die Bezeichnung „wenig“ verwenden kleine Kinder als Verneinung: *„nicht viel“,* das oft einer Enttäuschung Ausdruck verleiht. Darin sieht Kühnel den *zweiten unbestimmten Zahlbegriff* begründet.

3.2.1 Unterscheidendes Vergleichen

Kleinkinder erwerben schon früh ein erstes Verständnis von Zugehörigkeit im Sinne eines einfachen Mengenbegriffs und parallel dazu die Fähigkeit, Mengen zum Beispiel nach „viel“ oder „wenig“ zu unterscheiden. Kühnel (1966, 26) unterscheidet zwei Arten des Vergleichens: *urteilendes* und *messendes* Vergleichen, beides in *„roher“* (im Sinne von grober, ungenauer) und *präziser* Ausprägung.

Urteilendes Vergleichen, das man zutreffender auch als *unterscheidendes* Vergleichen bezeichnen kann, ist erforderlich, um folgende Tätigkeiten vorzunehmen:

1. *Unterscheiden* gefühlsbetonter *Qualitäten* („schmeckt mir“ oder „mag ich nicht“; „lieb“ oder „nicht lieb“); oder, mit mathematischem Bezug, Unterscheiden von Quantitäten in „groß“ oder „klein“, „viel“, „nicht viel“ oder „wenig“.
2. *Beurteilen von Zugehörigkeit: „gehört (nicht) dazu“.*

Vorbedingung für die Entwicklung beider Fähigkeiten ist eine gerichtete Aufmerksamkeit. Das bedeutet, dass es dem etwa zweijährigen Kind gelingt, seine Aufmerksamkeit *„einem besonderen Merkmalsgebiete zuzuwenden und gleichzeitig von den übrigen mehr abzusehen“* (Kühnel 1966, 27).

3.2.2 Blitzblickübungen zum unterscheidenden Vergleichen

Für diese Blitzblickübung ist die Anzahl der dargestellten Formen oder Farben noch irrelevant. Die Anordnung der Darstellungen sollte außerdem *nicht* durchgängig Würfelbildern entsprechen. Sollen die Karten später auch für Blitzblickübungen verwendet werden, bei denen das simultane Erfassen von Anzahlen geübt wird, sollte die Anzahl der Darstellungen pro Karte sechs Items nicht überschreiten.

Material: Aufgabenkarten mit aufgemalten oder aufgeklebten Farbsymbolen und/oder Figuren (Dreiecke, Kreise, Vierecke, auch Ovale, Herzen, Sterne, …).

Fragestellungen

- Welche *Farbe* hast du gesehen?
- Welche *Figur* („Form“) hast du gesehen? Hier sind zunächst die vom Kind selbst gefundenen Namen für Figuren zu würdigen. Parallel dazu werden korrekte Bezeichnungen vom Erwachsenen verwendet, gegebenenfalls mit dem Hinweis: „Dazu sagt man (… sagen die Erwachsenen …) auch … Kreis, Quadrat, Rechteck, Dreieck“ usw. Kinder sollten keinesfalls die Erfahrung

machen müssen, dass ihre eigenen Bezeichnungen als „falsch" oder „niedlich“ abgewertet werden. Ein Korrigieren erübrigt sich deshalb. Kinder übernehmen in der Regel recht schnell von selbst „erwachsene“ Bezeichnungen und sind stolz darauf.

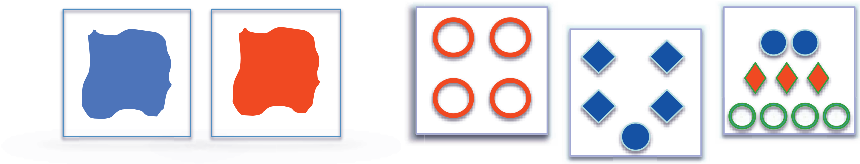


Abb. 3: Blitzblickübungen zum unterscheidenden Vergleichen: Beispiele für Aufgabenkarten

- Später auch mit zwei oder drei Farben und Formen „blitzblicken“ lassen. Welche Farben oder Formen erkennt und merkt sich das Kind?
- Wenn mit Gruppen gearbeitet wird, hat es sich bewährt, einen Bogen in Tabellenform zu erstellen. Kinder zeichnen in die Felder ein, was sie bei der jeweiligen Aufgabe gesehen haben.

3.3 Vergleichen und Klassifizieren

‚Sehr viel’ ist mehr als ein Kind erwartet. ‚Sehr wenig’ ist weniger als erwartet. ‚Mehr’ ist ein Hinweis auf etwas Gutschmeckendes, ‚nicht mehr’ ist ein Löffel bittere Medizin. ‚Nah’ ist das Anschmiegen an die Mutter. ‚Später’ meint ungeduldiges Wartenmüssen. *(*Greenspan & Shanker 2007).

Kinder, die die Fähigkeit zum unterscheidenden Vergleichen erworben haben, können zunehmend Objekte oder Gegenstände handelnd zusammenfassen, das heißt „Klassen“ bilden. Anfangs wissen sie in einfachen Kontexten schon: *„Das* gehört dazu und *das da auch*, aber *das hier nicht.“* Diese Entwicklungsstufe hat zum Beispiel das Kind erreicht, das im Alltag beim Aufräumen helfen möchte und weiß, *was wohin* gehört. Auch das Kind, das gezielt in der entsprechenden Schublade oder im Regalfach nach etwas sucht, hat vermutlich dieses einfachste Mengenverständnis erworben und kann in der Vorstellung gedanklich vorwegnehmend *Ort* und *Gegenstand* miteinander verknüpfen („Bälle gehören in *die* Kiste.“).

Die beschränkte Auffassungsfähigkeit kleiner Kinder schränkt allerdings ihre Fähigkeit zum Auffassen und Bezeichnen von Mengen ein. Diese Auffassung vertreten neben Kühnel in jüngerer Zeit auch Entwicklungspsychologen wie Greenspan und Shanker (2007). Das heißt, dass die Kategorien „viel“ und „wenig“ für kleine Kinder ausschließlich Maßmerkmale für bekannte und gefühlsbetonte Situationen und für Dinge sind, für die sie sich interessieren. Ein Verallgemeinern oder Übertragen auf andere Situationen gelingt ihnen noch nicht. Dies zu beachten, ist wichtig, will man die Fähigkeit zum unterscheidenden bzw. urteilenden Bezeichnen von Mengen und Quantitäten überprüfen. Ein 15-jähriges Mädchen an der Grenze zur geistigen Behinderung, mit dem eine der Autorinnen (JS) arbeitete, konnte beispielsweise in einer Diagnosesitzung nicht beurteilen, ob „fünf Fernseher in einem Wohnzimmer“ viel sind oder wenig. Möglicherweise hätte sie diese Frage beantworten können, wenn man sie direkt in ihrem häuslichen Umfeld befragt hätte.

Klassifizieren und Reihenbilden sind unverzichtbare *Teilaspekte* einer (prä-) numerischen Förderung und notwendig für das Aufbauen brauchbarer Zahlkonzepte, insbesondere eines anzahlbezogenen Teile-Ganzes-Verständnisses.

Piaget legte besonderen Wert darauf, dass Kinder nicht nur nach einfachen Merkmalen (Farbe, Größe, Form) klassifizieren (sortieren, ordnen, usw.), sondern auch hierarchische Klassifikationen (Ober- und Untermengen) bilden können und Inklusionsbeziehungen verstehen. Dabei geht es um Beziehungen zwischen den Teilen und dem Ganzen, dem Ganzen und den Teilen und zwischen den Teilen und den Teilen (Ginsburg & Opper 1978, 160). Diese Fähigkeiten sah er, zusammen mit dem Verständnis von Invarianzbeziehungen, als Voraussetzungen für den Aufbau eines tragfähigen Zahlkonzepts an.

Diese Auffassung gilt inzwischen als überholt. Mathematikdidaktiker gehen mittlerweile mehrheitlich davon aus, dass das Klassifizieren nach *einem Merkmal* (Größe, Form, Farbe) und ein *einfaches Bilden von Reihen* als Voraussetzungen für den Erwerb eines kardinalen Zahlverständnisses ausreichen (Scherer & Moser Opitz 2010, 109).

Trotz aller Kritik können pränumerische Aufgabenstellungen mit kognitionspsychologischen Beobachtungskriterien im Einzelfall hilfreiche diagnostische Hinweise geben zum geistigen Entwicklungsstand und der Ausprägung von Entwicklungsverzögerungen. Auch kann man aus ihnen Anregungen zur Förderung von Kindern mit schwerwiegenden Entwicklungsverzögerungen ableiten (vgl. Jakob 2004).

3.3.1 Beobachtung und Diagnose

a) Mengen erkennen

Kann das Kind Unterscheidungen treffen und Zugehörigkeit beurteilen? Findet es innerhalb einer Menge nicht-zugehörige Objekte und kann es das argumentativ begründen?

Material: Spielgegenstände oder Bildmaterial (Tierfiguren, Autos, Kuscheltiere); Alltagsdinge (Knöpfe, Stifte, Schrauben, Geschirr, …), strukturiertes Material (Logische Blöcke, etc.), konkrete Mengen oder Abbildungen, *bei denen ein Element nicht dazu gehört.*

Überprüfung und Aufgabenstellung: Dem Kind werden Mengen (konkret oder mit Bildkarten) vorgelegt, bei denen jeweils ein Element nicht dazu passt: Was passt hier nicht dazu? Oder: Hier hat sich ein blinder Passagier eingeschlichen, einer der nicht dazu gehört. Du sollst ihn herausfinden.

Hinweis: Begründen, warum ein gezeigtes oder benanntes Element nicht zu den anderen passt.

b) Mengen bilden

Kann das Kind selbstständig Objekte zu Mengen zusammenfassen?

Material: Gegenstände, Bilder (mit jeweils einem Objekt) oder Bildkarten, auf denen mehrere Objekte abgebildet sind.

Überprüfung und Aufgabenstellung

Wichtig ist, Kinder stets zum Begründen und Argumentieren anzuhalten: Warum passen diese Dinge zusammen? Was passt von den „roten Dingen“ noch zusammen? Warum passt das da nicht dazu?

- Material nach freien, selbstgewählten Kriterien sortieren lassen, dann nach vorgegebenen Merkmalen: Lege alle Blumenbilder in den Kreis!; Gibt es Blumen, die besonders gut zusammenpassen?“; „Lege … zusammen!
- Vorgeben einer Menge mit Teilmengen (konkrete Dinge oder Abbildungen): Herausfinden des übergeordneten Merkmals (auf allen Bilder sind Blumen oder Tiere dargestellt) und der Merkmale, die die Unterabteilungen charakterisieren (z. B. Alle Blumen mit roten, mit gelben Blütenblättern, alle Blumen, die fünf, genau vier Blütenblätter haben o. ä.).

Abb. 4: Beispiele für Arbeitsmaterial zur Klassifikation nach Jakob 2004

3.3.2 Fördervorschläge zum Klassifizieren

Im Haushalt

Alltagsdinge sortieren und „aufräumen“. Kästen mit Bauklötzen etc. richtig einräumen (jedes Ding an seinen Platz). Geschirr und Besteck abtrocknen und einräumen.

Im Klassenzimmer

- „Plätze wechseln“: Alle Kinder mit blauen Hosen wechseln die Plätze; dito: mit langärmligen Pullovern; mit gestreiften Socken; alle, die älter sind als sechs Jahre; die schon einmal ein lebendes Reh gesehen haben; die wissen, wo die Bücherei ist usw.

- Gegenstände aus dem Alltag und Schulleben nach Merkmalen beschreiben und gezielt herausfinden können (das große Feuerwehrauto, die grünen Steckwürfel).
- Einräumen und Aufräumen, gezielt suchen und entnehmen. Weitere Ordnungsmerkmale finden lassen (wie könnte man die Sachen denn noch ordnen oder sortieren?). Begriffe verwenden, die das Kind bereits kennt.
- Schatzkisten anlegen und entsprechend Dinge sammeln. Dinge auf eine „Schatzinsel" bringen („Alle roten Schätze dürfen auf die Schatzinsel!", …), Fundstücke ordnen.
- Fallschirm- oder Torspiele (alle Kinder mit kurzen Ärmeln, …, laufen durch…), siehe auch die Vorschläge zu den Logischen Blöcken von Z. P. Dienes.
- Detektivspiele (Blinder Passagier): Hier ist etwas nicht in Ordnung. Einer hat sich dazu geschmuggelt. Bei diesem Spiel muss sachbezogen argumentiert werden.

Blinder Passagier: Herausfinden, was nicht zu einer Menge passt und argumentativ begründen. Dieses Spiel kann auch mit anderen Materialien gespielt werden, zum Beispiel mit unterschiedlichen Zehnerfeldern (eine Anzahl passt nicht zu den anderen) und in höheren Schuljahren zunehmend abstrakt nur mit Begriffen. In der Schule eignet es sich gut für ritualisierte Unterrichtsphasen (zum Beispiel nach der Pause oder generell zum Unterrichtsbeginn). Neben der Fähigkeit zum urteilenden oder unterscheidendem Vergleichen wird mit diesem Spiel beiläufig der Wortschatz der Kinder erweitert und es werden insbesondere Beobachtungs- und Argumentationsfähigkeit gefördert.

- „Ich sehe was, das du nicht siehst"; Kim-Spiele.
- Kinder auch frei Fingerbilder zwischen 1 und 5 zeigen lassen. Alle Kinder, die 4 (usw.) zeigen, wechseln die Plätze.
- Kartenspiele (z. B. Halli-Galli, Speed)

Abb. 5: Material zum Üben des Klassifizierens (Hoenisch und Niggemeyer 2007)

Falls erforderlich, werden einzelne Merkmale auch sensomotorisch erarbeitet und vertieft. Beispiele hierfür sind

- **Farbenkenntnis**: Farbgeister spielen (in farbige Tücher hüllen, Körperbemalungen, Farbspuren mit Händen und Füßen);
- Erfassen runder **Formen**: runde Dinge rollen lassen etc.;
- **Merkmale** *erfühlen* (weich – rau – glatt …), *riechen* (Zitrone, Pfefferminze, …) oder *erschmecken* (süß – sauer – salzig …) usw.

Mit älteren Kindern wird man spätestens im Biologieunterricht auch „wissenschaftliche“ Klassifikationen vornehmen wie in folgendem Beispiel. Hunde: Schäferhunde, Haushunde, Hütehunde, Jagdhunde, ..., Vierbeiner, Säugetiere, Tiere; vgl. auch das „Haus der Dreiecke“ oder das „Haus der Vierecke“ im Geometrieunterricht.

- **Tiergruppen** bilden nach Kriterien wie

  Zwei- oder Vierbeiner, Insekten, Spinnen, Krebse, Schlangen, Fische, …

  Haus-, Bauernhof- oder Raubtiere, Nagetiere, Alles- oder Pflanzenfresser;

  Bewegungsarten (fliegen, schwimmen, kriechen, springen),

  Körperbedeckung (Fell, Gefieder, Schuppen).
- **Naturmateria**l sortieren: Muscheln und Schnecken, Blumen, Blattformen und/oder Blütenbilder (alle gelben Blüten mit fünf Blütenblättern), auch Edelsteine, Zapfen usw.
- **Fahrzeuge:** Art (Autos, LKW, Feuerwehrautos, Polizei, Krankenwagen usw.), Farbe usw.

3.4 Messendes Vergleichen

Die neu einsetzende Fähigkeit zum Unterscheiden nach Kategorienpaaren wie viel-wenig oder groß-klein ist Grundlage für den noch komplexeren *Mengenvergleich* (mehr als, größer als usw.). Anfangs handelt sich dabei um einen „rohen“ Vergleich, bei dem *„nur grobe Unterschiede (ein paar, ein Haufen) in starker Gefühlsbetonung als mehr oder weniger angenehm erfasst [werden].“* (Kühnel 1966, 24). Die Fähigkeit zum groben quantitativen Beurteilen von Mengen bezeichnet Kühnel schließlich als dritten Zahlbegriff: *„Als dritter Zahlbegriff erscheint wieder etwas später das ‚mehr', während die nächsten, weniger, zu viel, zu wenig – gemeinhin erst in größeren Abständen folgen.“* (a.a.O., 23).

3.4.1 Seriation

Seriation bedeutet, Objekte in einer durch Ordnungskriterien festgelegten Reihenfolge anzuordnen, zum Beispiel einem linearen Muster oder der Länge, Größe usw. nach.

Dabei kann es sich um *periodische Folgen* handeln (beispielsweise Formen oder Farben) oder um *Reihen,* die untereinander in einer Relation zueinander stehen (zum Beispiel in einer Größer-/Kleiner-Relation). Auch zeitliche Abfolgen werden betrachtet. *„Durch Erfahrungen in der Reihenbildung wird das spätere Verständnis der Zahl als aufsteigende Zahlenreihe, der Beziehung der Zahlen als Größen zueinander sowie ihrer Stellung in der Reihe aufgebaut“* (Naumann-Kipper, 2008, S. 78).

a) Muster bilden, erkennen und fortsetzen

Das Bilden von Mustern im Sinne periodischer Folgen erfordert ein unterscheidendes Vergleichen hinsichtlich von Aspekten wie Form, Farbe, Lage, Anzahl. „Muster“ können in unterschiedlicher Differenziertheit und Abstraktion gebildet werden. Ihr Komplexitätsgrad kann außerordentlich hoch sein. Bei einfachen, gegenständlichen Mustern sind die Musterabschnitte (Zyklen) kurz; ihre Mindestanzahl ist zwei, z. B. <rot-blau>; <dick-dünn> usw.

Material: Muggelsteine, Fädelperlen, Stäbchen, Bausteine, Naturmaterial, Logische Blöcke ...

Überprüfung/Aufgabenstellung: Ein Teil eines linearen Musters wird vorgegeben. „Baue (lege) das Muster weiter." „Repariere das Muster".

Beobachtungshinweise: Folgende, vom Muster abweichende Legeversuche können beobachtet werden. An ihnen wird deutlich, wonach sich die Aufmerksamkeit des Kindes jeweils richtet (vgl. auch die Ausführungen zu den „Logischen Blöcken".

1. Spiegelbildliches Weiterbauen nach einem Zykel
2. Die Elemente eines Dreier- oder Viererzykels werden zwar verwendet, es wird aber nicht auf die korrekte Reihenfolge geachtet.
3. „Unterwegs" wird die Aufgabenstellung – bedingt durch die zufällige Lage einiger Steine – verändert.

Anregungen, auch zum fächerübergreifenden Arbeiten mit Mustern

- Spiele mit Logischen Blöcken (Kapitel 9);
- Zeichnungen fortführen oder selbst erstellen;
- Weitere Objekte nach Mustern anordnen, hierbei folgende Aspekte beachten:
    - Größe (abwechselnd groß – klein),
    - Farbabstufung, Dicke, Höhe, usw.
- „Das Bilderbuch" von C. Schroff (Lehrmittelverlag Zürich) enthält zwei Bildseiten zu Mustern und Strukturen mit weiteren Fragestellungen und Impulsen.

b) Rhythmische Muster: Rhythmus-, Klang- und Bewegungsmuster

Rhythmen und Gesten wie Händeklatschen, Fingerschnippen etc. werden zunächst durch Piktogramme veranschaulicht. Piktogramme sind abstrahierte, symbolische Darstellungen, in denen aber noch Bezüge zum Realgegenstand bzw. zur Tätigkeit erkannt werden können. Etwas später wird noch weiter abstrahiert, indem die Piktogramme ersetzt werden durch noch abstraktere Symbole, wie in obiger Abbildung durch Bauklötze: Holzquader stehen für Schnippen, Würfel symbolisieren das Händeklatschen. So lassen sich Handlungsfolgen wie Rhythmen zeichenhaft abbilden. Dies bedeutet einen wichtigen Schritt hin zur Symbolisierungsfähigkeit und dem Verständnis abstrakter Zeichen und Symbole.

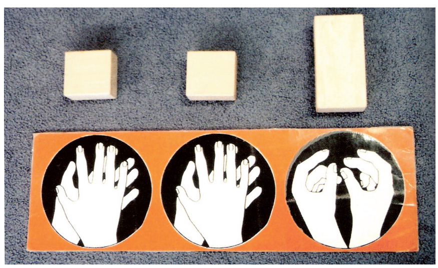


Abb. 6 Anregungen zur Umsetzung rhythmischer Muster aus Hoenisch und Niggemeyer 2007

c) Reihenfolgen bilden

Seriationen, bei denen Objekte nach ihrer Größe (Länge, Dicke, etc.) geordnet werden, verlangen ein **messendes Vergleichen.** In der Regel können diese Aufgaben durch direktes Vergleichen der Objekte gelöst werden. Diese Form der Seriation hat Bezug zum ordinalen Aspekt von Zahlen.

Abb. 7: Material zur Seriation nach Jakob (2004)

3.4.2 Beobachtungshinweise und diagnostische Aufgabenstellungen

Aufgabenstellungen zum Klassifizieren und zum Bilden von Reihenfolgen für junge Kinder sollten möglichst kontextorientiert sein, das heißt in kleine, kindgemäße Geschichten eingekleidet werden. Bewährte Kontexte für die Seriation sind Vorstellungen des Wachsens oder einer Treppe.

- *Vorstellung des Wachsens:* Kontinuierlich größer werdende konkrete Objekte oder Abbildungen (Blumen, Bäume, Tiere, Kinder usw.).
- *Vorstellung einer Treppe:* Kontinuierlich größer, dicker, länger, höher werdende Objekte (Holzstäbe, Pappstreifen, Montessorimaterial usw.). (vgl. Jakob 2004).

Überprüfung/Aufgabenstellung

Ein Material der Kategorie „Klassifizieren“ wird unsortiert angeboten. Folgende Fragen werden gestellt:

- Zeige mir den größten …!; Zeige mir den kleinsten …!
- Lege die Tannenbäume so hin, dass man sieht, wie der kleine Baum immer größer gewachsen ist
- Baue eine Treppe, so dass das Männchen (Playmobilfigur o. ä.) hinaufsteigen kann.

Abb. 8 entnommen aus Jakob (2004).

Umkehrung (Reversibilität): Vom größten zum kleinsten Gegenstand.

- Ein Männchen möchte die Treppe hinuntersteigen (Abb. 8), ein Zauberer zaubert Gegenstände immer kleiner, im Traum schrumpft etwas, Bilderfolgen zeigen Gegenstände, die immer mehr abnehmen oder kleiner werden, in unterschiedlichen Zuständen und zu unterschiedlicher Zeit (Kerzen, Luftballons, Kuchen, …).

Beobachtungshinweise

- **Treppenbildung:** Hält das Kind die Grundlinie ein, beachtet es die Basis?

  Beispiel: Bei den oben abgebildeten Tannenbäumchen wurde die Grundlinie nicht eingehalten. Das Kind ordnete stattdessen stufenförmig nach einer gedachten „Gipfellinie" an.
- **Unvollständige Reihenbildung:** Sind Teilserien richtig gelegt? Hält das Kind beim Legen die Richtung ein?

Weitere Hinweise und Tipps

- Falls das Kind eine Aufgabenstellung nicht versteht, kann eine Serie vorgelegt und anschließend wieder ungeordnet angeboten werden.
- Aus einer bestehenden Serie ein oder zwei Elemente entfernen und vom Kind an den richtigen Stellen wieder einfügen lassen.
- Verändern der Anzahl der Elemente einer Serie – erweitern oder vermindern, zum Beispiel jedes zweite Element entfernen. Kommt das Kind damit klar?
- Falls das Kind noch große Mühe mit diesen Aufgabenstellungen hat, Material aus dem Interessensspektrum des Kindes wählen.
- Komplexere Aufgaben erfordern ein Zuordnen von Serien zueinander (das größte für das größte Tier, das kleinste für das kleinste), vgl. die beiden Abbildungen unten.

Abb. 9: Material zur Seriation und zur Stück-für-Stück-Korrespondenz aus Jakob (2004).

3.4.3 Zusammenfassung: Unterscheidendes und messendes Vergleichen

Die Fähigkeit zum unterscheidenden Vergleichen geht dem messenden Vergleichen voraus. Unterscheidendes Vergleichen ist eine synthetische Tätigkeit, die die Grundlage des Zusammenfassens (Klassifizierens) bildet. Dabei handelt es sich um ein willentliches „Zusammenfassen einer begrenzten Menge" (Kühnel 1966, 29). Messendes Vergleichen hingegen ist eine analytische Tätigkeit und befähigt Kinder zur Seriation, das heißt zum Erkennen, Bilden und Fortsetzen von gegenständlichen, rhythmischen oder zeitlichen Mustern, zum Ordnen von Gegenständen der Größe, Breite, Länge usw. nach, aber auch zum Ordnen von Ereignissen, beispielsweise durch zusammenhängendes Erzählen (zuerst …, dann …, am Schluss…) (vgl. Schäfer 2014, 15). Bei beiden Vergleichsformen geht es um *kindliche Denkstrukturen,* die die Entwicklung des Zahlbegriffs vorbereiten und begleiten.

Bezogen auf das *unterscheidende beziehungsweise urteilende* Vergleichen entwickeln sich folgende Denkstrukturen:

gehört (nicht) zu …, passt (nicht) zu …

ist … oder ist nicht ….

ist ein Teil von … / ist nicht Teil von …

viel, wenig.

Bezogen auf das *messende Vergleichen* sind dies Begriffe und Denkschablonen, bei denen es um ein Erkennen von Beziehungen geht:

kein, eins, ein paar, (sehr) viele;

größer, kleiner als;

gleichviel, mehr als, weniger als.

Diese Denkstrukturen und Begriffe erwerben Kinder bei Alltagserfahrungen und beim Spielen, daheim, draußen, auf dem Spielplatz und im Kindergarten, aber auch durch gezielte und strukturierte Förderangebote.

3.5 Protoquantitative Schemata: Mengenbezogenes Verständnis

Resnick (1989 und 1990) beschreibt insgesamt drei protoquantitative[3] Schemata, mit deren Hilfe Kinder systematische Beziehungen zwischen Quantitäten[4] entdecken und sie sprachlich beschreiben. Die protoquantitativen Schemata werden bereits im Kleinkindalter erworben und sind wesentlich für den späteren Aufbau von Zahlverständnis. Neben dem *Vergleichschema* handelt es sich dabei um das *Zunahme-Abnahme-Schema*, bei dem Kinder ein Verständnis dafür aufbauen, dass sich Quantitäten nur verändern, wenn etwas zu einer Menge hinzugefügt oder weggenommen wird und um das mengenbezogene *Teile-Ganzes-Schema*.

3.5.1 Vergleichschema (compare schema)

Das erste der drei protoquantitativen Schemata bezeichnet Resnick als Vergleichschema. Kinder erleben, dass man Mengen beziehungsweise Ganzheiten direkt miteinander vergleichen kann. Resnick weist darauf hin, dass die Fähigkeit zum Vergleichen auf einer frühen Stufe ausschließlich auf der Wahrnehmungstätigkeit beruht: *„Protoquantitative compare, a schema that makes greater-smaller comparative judgments of amounts of material. Using it, children express quantity judgments in the form of comparative size labels such as bigger, longer, and more. These comparisons are initially based on direct perceptual judgements, but they form a basis for eventual numerical comparisons of quantities.“* (Resnick et al. 1990, 5).

Beim unterscheidenden Vergleichen ist es zunächst nur notwendig, einer Menge Begriffe wie „viel“ oder „wenig“ zuzuordnen. Die komplexere Fähigkeit, Mengenrelationen im Sinne definierter Beziehungen zu verstehen, wie beispielsweise eine Größer-Relation, setzt Mengenverständnis und die Fähigkeit

---

[3] Die Begriffe ‚quantity‘ wie auch ‚Quantität‘ sind prinzipiell vieldeutig. Man kann sie übersetzen mit Menge, Anzahl, Größe oder Maß. Wenn Resnick von protoquantitativen Schemata spricht, kann man dies mit „vorzahlig“ übersetzen. Es handelt sich also bei den protoquantitativen Schemata in Anlehnung an Resnick unserer Auffassung nach um ein Verständnis von Mengen ohne exakte quantitative Bestimmung. Das Kind weiß noch nicht zuverlässig, dass Mengen mit Zahlwörtern exakt quantifiziert werden können. Eine Ausnahme bilden möglicherweise die Anzahlen eins, zwei und später auch drei. Sie werden vom dritten Lebensjahr an von vielen Kindern spontan benannt und verstanden und bilden die Grundlage für alle weiteren Zahlkonzepte und mathematische (arithmetische) Einsichten (Baroody 2009).

[4] Der Begriff der Quantität wird hier synonym verwendet zu Mengen im umgangssprachlichen Sinn.

zum Mengenvergleich voraus. Das sichere Umgehen mit Vergleichswörtern (mehr *als* – weniger *als* – gleichviel) ist darum neben dem verständnisvollen Zählen, das sich parallel entwickelt, eine unverzichtbare Grundlage für den Erwerb tragfähiger Zahlkonzepte (vgl. Gaidoschik 2007).

Blitzblickübungen zur Mengenunterscheidung und zum Mengenvergleich

Die Aufgabe, Mengen nach ihrer Größe (Mächtigkeit) zu unterscheiden und/oder zu vergleichen, kann einzelnen Kindern noch schwer fallen. Hier empfehlen sich zur Förderung Blitzblickübungen zur Mengenunterscheidung und zum Mengenvergleich.

Man kann dabei so vorgehen, dass zwei Mengen auf einen Blick präsentiert werden und die Schüler den entsprechenden Arm oder gegebenenfalls auch beide Arme ausstrecken, um zu signalisieren, ob eine, beide oder keine Menge „viel" oder „wenig" zeigt. Die Anzahlen der Objekte auf jeder Karte sollen möglichst eindeutig den Begriffen „viel" oder „wenig" zugeordnet werden können (wenig: $n \leq 3$; viel: $n \geq 8$). „Viel" sollte nicht präzise simultan erfassbar sein, „wenig" hingegen schon. Wenn beide Mengen „wenig" zeigen und die Aufgabe lautet, bei „wenig" die Hände auszustrecken, müssen auch beide Hände gestreckt werden usw.

Wenig später kann man dazu übergehen, die Mengen direkt zu vergleichen, dann lautet die Aufgabe: Zeige, wo es mehr/weniger oder gleich viele waren.

Material

Aufgabenkarten mit Figuren (Dreiecke, Kreise, Vierecke, auch Ovale, Herzen, Sterne, …)

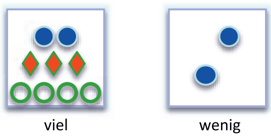


Abb. 10: Aufgabenkarten zur Mengenunterscheidung und dem Mengenvergleich

Hinweise

- Die Präsentationszeit sollte bei diesen Aufgaben nicht zu kurz sein, da zwei Mengen- oder Punktebilder erfasst und verglichen werden müssen. Die Ansage „Achtung Blitzblick" wird darum gedehnter gesprochen und die Aufgabenseite entsprechend etwas länger präsentiert.
- Erfahrungsgemäß fällt es vielen Kindern leichter, zu sagen, was „viel" ist als zu beurteilen, ob und wann etwas „wenig" ist.
- Die Frage nach „viel" oder „wenig" ist nicht immer einfach zu beantworten. Darum sollte sie immer wieder mit Realsituationen gekoppelt werden: *Sind drei Schüler auf dem Schulhof viel oder wenig? Wie ist es mit drei Fernsehern in Kinderzimmer? Drei Lehrerinnen im Klassenzimmer? Drei Gummibärchen?*

3.5.2 Zunahme-/Abnahme-Schema (increase/decrease schema)

Neben der Fähigkeit zum Mengenvergleich interpretieren 3- bis 4-jährige Kinder *Veränderungen an Mengen bzw. an Ganzheiten* durch Hinzufügen oder Wegnehmen. Das Kind auf dieser Stufe seines Mengenverständnisses weiß, ohne dies in Zahlen ausdrücken zu können: Eine Menge oder ein Ganzes wird größer (‚mehr'), wenn ihr etwas hinzugefügt wird, sie wird kleiner (‚weniger'), wenn etwas aus ihr entnommen wird. Kinder verstehen grundsätzlich auch, dass Mengen oder Ganzheiten gleich bleiben, wenn nichts hinzugefügt oder entfernt wird, lassen sich aber noch durch sprachliche Formulierungen oder wahrnehmungsgebundene Täuschungen verwirren: *„They can be fooled by perceptual cues or language that distracts them from quantity, but they possess a basic understanding for addition, subtraction and conservation."* (Resnick 1989, S. 163).

Eine Bedingung zum Verstehen der Mengengleichheit ist, dass Kinder Stück-für-Stück-Korrespondenzen, im Sinne gleichmächtiger Mengen herstellen können.

Stück-für-Stück-Korrespondenz: Gleichheit erkennen und herstellen

Inhalt der Fragestellung: Kann das Kind gleichmächtige Mengen durch Stück-für-Stück-Korrespondenz (Eins-zu-eins-Zuordnung) herstellen?

Material: Knöpfe, kleine Süßigkeiten (Gummibärchen, Smarties), Münzen o. ä.

Abb. 11: Material zur Seriation und zur Stück-für-Stück-Korrespondenz aus Jakob (2004).

Überprüfung/Aufgabenstellung:

- Lehrerin legt eine Reihe Centstücke o. ä. und fordert das Kind auf: „Wir wollen beide gleich viele haben. Lege so viele …, dass du gleich viele hast wie ich".
- Kontextbezogene und handlungsorientierte Aufgabenstellungen gestalten wie in den beiden obigen Abbildungen: Jedes Kaninchen soll eine Karotte bekommen. Sind genug Karotten da?
- Im Alltag und im Spiel kann das Herstellen von Stück-für-Stück-Korrespondenzen gefördert werden über das Tisch-Decken, das Füttern von Tieren, das „Parken" von Spielzeugautos usw.

Beobachtungshinweise – entwicklungsbezogene Lösungsmöglichkeiten

- Manche Kinder legen Reihen, ohne eine Stück-für-Stück-Zuordnung und ohne Anfang oder Ende zu beachten.
- Das Kind beachtet nur die Längendimension, das heißt es legt eine Reihe, die zwar gleich lang ist wie eine vorgegebene, beachtet aber nicht die Eins-zu-eins-Zuordnung und legt daher mehr oder weniger Elemente.

- Das Kind legt Stück für Stück zwei gleich lange Reihen. Falls das Kind die gleichmächtige Menge durch Zählen herstellt, ist dies zu akzeptieren.

3.5.3 Teile-Ganzes-Schema (part-whole schema)

Schließlich verstehen Kinder, dass man Ganzheiten („Mengen“) zerlegen und neu zusammensetzen oder einzelne Elemente verschieben kann, ohne dass sich am Ganzen etwas ändert. Das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema gewinnen Kinder anhand von Alltagserfahrungen des Zusammensetzens und Zerlegens von Ganzheiten. Resnick beschreibt weiter, dass Kinder bereits wissen, dass beispielsweise ein ganzer Kuchen mehr ist als ein Stück davon. Vordergründig widerspricht dies älteren Annahmen zur Klasseninklusion von Piaget. Laut Resnick konnten jedoch mehrere Studien bestätigen, dass schon 4- bis 5-jährige Kinder korrekte Aussagen zur Klasseninklusion formulieren können, wenn man sie explizit darauf hinweist, ihre Aufmerksamkeit auf das Ganze („the whole collection“) zu richten und ein dem Kind bekannter Begriff für das Ganze verwendet wird: *„speaking of a forest instead of pine trees plus oak trees“* (ebd.).

Alle drei protoquantitativen Schemata haben zumindest anfangs ein urteilendes Vergleichen zur Grundlage: *„It is true, that preschoolers' protoquantitative knowledge lacks certain basic measurement rules. Preschoolers do not typically know, for example, that to compare the lengths of two sticks it is necessary to align them at one of the ends.“* (ebd.).

Diese Beziehungen können nicht einfach von der Wahrnehmung erfasst werden, sie sind eine Entdeckung des kindlichen Denkens. (Jakob 2004).

Mengeninvarianz

Diese Aufgabenstellung schließt sich sinnvollerweise erst an, wenn das Kind bereits die Eins-zu-eins-Korrespondenz in der vorigen Aufgabe bewältigen konnte. Sie ist auch sinnvoll, wenn das Kind den Mengenvergleich zählend bewältigte.

Inhalt der Fragestellung: Bleibt das Kind von der Gleichmächtigkeit zweier Mengen überzeugt, auch wenn deren räumliche Anordnung verändert wird?

Material: zwei gleichmächtige Reihen aus Wendeplättchen, Centstücken o. ä. (Ausgangslage).

Überprüfung/Aufgabenstellung

- Lehrerin schiebt eine der beiden Reihen zusammen und fragt das Kind: „Haben wir beide gleich viele …?“ oder „Hast du gleich viele wie ich?“.
- Bei „Nein“ folgt ein Gespräch: „Warum nicht? Hat einer von uns beiden mehr/weniger? Wie kann man das herausfinden?“
- Die Wendeplättchen werden wieder in die Ausgangslage zurück geschoben. „Und wie ist es jetzt?“
- Lehrerin zieht eine Reihe auseinander. Vgl. oben.

Anmerkungen: Kinder, die sich noch von der Wahrnehmung täuschen lassen und urteilen, dass eine Menge „mehr“ bzw. „weniger“ werde, wenn ihre Elemente räumlich auseinander gezogen bzw. zusammengeschoben werden, haben häufig keine Konflikte damit, beim Zurückführen in die Ausgangslage erneut ein „gleich viel“-Urteil zu fällen. Dies ist typisch für das präoperative Denken. Das heißt, ein Kind beachtet nur den jeweiligen Zustand und berücksichtigt in seinem Denken nicht die vorgenommenen Veränderungen/Transformationen.

Erst wenn das Kind beharrlich sein „gleich viel!“ behauptet, kann man auf eine erworbene Mengeninvarianz schließen, die für den Umgang mit Mengen und Zahlen essentiell ist. Zuvor können unterschiedliche räumliche Anordnungen von numerisch erfassten Mengen nicht als „gleich viel“ und damit als dieselbe (An-)Zahl erkannt, das heißt „verstanden“ werden.

Zweifellos kann aber die noch nicht ausreichend gesicherte Mengeninvarianz über den entsprechenden Umgang mit Mengen und Zahlen durch ein handelndes Strukturieren von Mengen und Reflektieren, Sprechen über entstandene Konfigurationen etc. erworben bzw. erweitert werden (Jakob 2004).

3.6 Protoquantitative Schemata: Diagnostische Aufgabenstellungen

Auszug aus Gerster und Schultz (2000, 249), ergänzt durch JS: Es geht um Urteile über die Auswirkungen von Veränderungen an numerisch unbestimmten Mengen, das heißt an Mengen, deren Elemente zuvor nicht gezählt wurden. In den Aufgaben sind Invarianz- und Varianzurteile verlangt. Invarianzurteile werden in der Regel zuerst in Verbindung mit Zahlen untersucht und die protoquantitativen Urteile nur abgefragt, wenn Kinder damit Schwierigkeiten hatten oder Unsicherheiten zeigten. In diesem Zusammenhang (vorzahlige Urteile über Mengen) kann auch untersucht werden, ob das Kind die Begriffe mehr, weniger, gleichviel richtig verwendet, und ob es eine Menge „gerecht“ an zwei Kinder verteilen kann.

Hilfreich dabei ist wiederum das Wissen um drei protoquantitative Schemata in Anlehnung an Resnick (1989), wie sie zuvor beschrieben wurden: (1) Protoquantitatives Schema des Vergleichs (Mengen beurteilen nach viel – wenig; Mengen vergleichen), (2) Zunahme-Abnahme-Schema (Eine Menge wird mehr, wenn ihr etwas hinzugefügt wird, sie wird weniger/kleiner, wenn aus ihr etwas entnommen wird), (3) Teile-Ganzes-Schema (Mengen verändern sich nicht, wenn Elemente zwischen den Teilen hin- und hergeschoben werden: Kompensatorische Veränderungen; Wenn ein Teil vergrößert wird, vergrößert sich das Ganze: Kovariante Veränderungen).

Material: kleine Steine, Plättchen, Zähldinge, Stoffsäckchen oder Schachtel

Hinweise

Die Menge sollte so groß sein, dass man sie nicht leicht mit den Augen zählen kann. Es ist sinnvoll, die Fragestellung in Kontexte einzubetten, die geeignet ist, Kinder zu interessieren: Die Steine können eine Sammlung kostbarer Dinge sein. Die Veränderung wird von einer anderen Person vorgenommen, man muss aufpassen, dass nichts verloren geht, wegkommt etc.

Überprüfung/Aufgabenstellung

Eine Menge von Steinen, die zuvor nicht gezählt wurde, wird vorgelegt oder vom Kind selbst irgendwo herausgenommen.

- Es darf schätzen, wie viele es sind.
- Sind es viele/wenige Steine?

- Die Anordnung der Menge auf dem Tisch (oder besser Tablett) wird auf verschiedene Weise verändert (ausgedehnt oder zusammengeschoben oder in eine kleine Schachtel gefüllt):„Sind es jetzt noch ebenso viele Steine wie vorhin, oder sind es mehr oder weniger?“
- Die Menge wird in zwei Häufchen zerlegt, die anschließend in zwei kleine Schachteln gefüllt werden.

  „Sind alle Steine, die du vorhin herausgenommen hast, in einer der beiden Schachteln?“

  „Sind in beiden Schachteln zusammen noch ebenso viele Steine wie vorhin oder sind es jetzt mehr oder weniger?“

  Die Formulierung „in beiden Schachteln zusammen“ wird am besten durch eine Geste unterstrichen, die einen Kreis um beide Schachteln beschreibt.
- Dann werden verschiedene, einander kompensierende oder nicht kompensierende Veränderungen an einem oder an beiden Teilen vorgenommen:

  Ein Stein wird aus Schachtel A in Schachtel B getan;

  aus einer Schachtel wird ein Stein herausgenommen oder es wird einer hinzugefügt.
- „Sind in beiden Schachteln zusammen noch ebenso viele Steine wie vorhin oder sind es jetzt mehr oder weniger?“ Oder: „Sind es insgesamt noch ebenso viele Steine wie vorhin oder sind es jetzt mehr oder weniger?“ Die Formulierung „in beiden Schachteln zusammen“ wird wiederum am besten gestisch unterstützt.

4. Zahlverständnis und Zählfertigkeit

„Bevor ein Kind zählen kann, muss es eine Art emotionales Verständnis für Quantität und Maß haben.“ (Greenspan & Shanker 2007, S. 63).

reihe

eis
zweig
dreist
vieh
füllf
ächz
silben
ach
neu
zink

Ernst Jandl

Schon vor Schulanfang besitzen weitaus die meisten Kinder vielfältige Kenntnisse und Fertigkeiten zu Zahlen und zum Umgang mit ihnen. Die Komplexität von Zahlen macht es Kindern jedoch nicht leicht, das Konzept „Zahl" zu verstehen, auch dann nicht, wenn sie schon die Zahlwortreihe bis 20 beherrschen. Zahlen bezeichnen Positionen, bezeichnen und ordnen Reihenfolgen, werden zum Nummerieren verwendet. Dies ist der **ordinale Aspekt.** Er enthält **Zählzahl-, Ordnungszahl-, und Reihenfolgeaspekt**: „Wer wievielte?" „der dritte Apfel".

Zahlen bezeichnen außerdem Anzahlen. Dies ist der **kardinale Aspekt,** auch Anzahlaspekt genannt: „Wie viele?" „acht Äpfel".Im Deutschen bezeichnet das zuletzt genannte Zahlwort zugleich die Anzahleigenschaft („vier") und den Rangplatz („Nummer vier") des zuletzt gezählten Objekts (last word rule).

Weitere Zahlaspekte sind: Operatoraspekt, Maßzahlaspekt, Codierungsaspekt, Rechenzahlaspekt, usw. Vermutlich erwerben Kinder die verschiedenen Zahlbedeutungen zunächst einzeln und voneinander isoliert, in subjektiven Erfahrungsbereichen und Anwendungskontexten. Erst im Laufe der Schulzeit werden ihnen **Wechselbeziehungen zwischen Zahlaspekten** deutlich. Dann erst wird ein **umfassenderer Zahlbegriff** aufgebaut.

In der Grundschule und der Grundstufe der Förderschule werden Zahlaspekte begrifflich nicht thematisiert, das bedeutet, es soll kein Unterricht *über* Zahlen stattfinden. Zahlaspekte machen der Lehrperson jedoch verschiedene Anwendungsbezüge deutlich, so dass **Mathematikunterricht ein Unterricht mit Zahlen** ist.

Im Mathematikunterricht hat man es vor allem mit Zahlen zu tun. Unter Bezeichnungen für *Objekte*, *Eigenschaften*, *Zustände* und *Beziehungen* bilden *Zahlen* eine eigene Kategorie. Es handelt sich dabei nach Kühnel um *Begriffe des Maßes* und zwar der *Quantität* („wie viele?") und der *Qualität* (zum Beispiel im Hinblick auf Ordnungsrelationen). Verständnis für Quantität und Qualität entwickelt sich bei Kindern stufenweise und beinhaltet mengen- und zahlenbezogene Wissensanteile.

4.1 Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen

Im deutschsprachigen Raum wurden Niveaustufenmodelle zur Entwicklung mengen- und zahlenbezogener Kompetenzen unter anderem von Krajewski und Kollegen, von Fritz und Ricken sowie im amerikanischen Raum von Baroody et al. (2009, vgl. Kap. 7.1) erarbeitet. Das ursprüngliche Modell von Krajewski und Schneider aus dem Jahr 2006 wurde zwischenzeitlich mehrfach überarbeitet (zum Beispiel 2008 und 2013). So werden die Komponenten „Mengenbegriff und Mengenvergleich", die in der ursprünglichen Fassung getrennt voneinander quasi eine „Rahmung" für den Erwerb der verbalen Zählkompetenz bildeten, im neuesten Modell subsummiert unter dem Begriff „Größenunterscheidung"[5]. Für den Erwerb des frühen Mengenverständnisses macht es jedoch nach unserer Sicht Sinn, Mengenbegriff und Mengenvergleich getrennt voneinander zu erörtern, wie wir das in den vorausgegangenen Kapiteln auch versucht haben. Wir beziehen uns daher ausdrücklich auf die ursprüngliche Darstellung.

---

[5] Dabei hat sich die Begrifflichkeit nicht unbedingt vorteilhaft geändert: Krajewski und Ennemoser (2013) sprechen missverständlich von *Größen,* was prinzipiell eine legitime Übersetzung von „Quantität" ist. Die Autoren meinen dabei jedoch nicht den in der Fachdidaktik Mathematik seit langem etablierten Begriff „Größen" (Längen, Gewichte usw.) sondern rekurrieren auf die Mächtigkeit von Mengen.

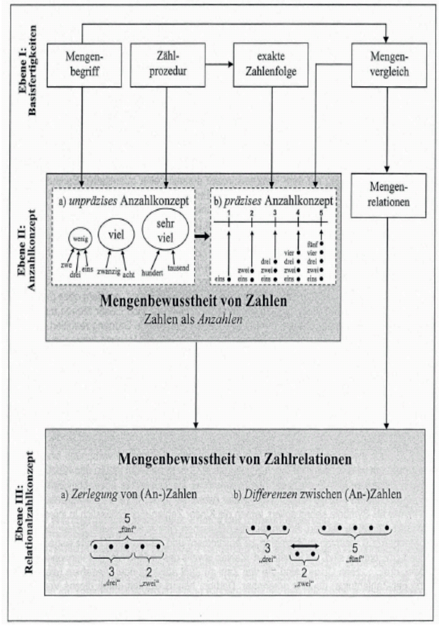


Abbildung 1: Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen

Abb. 12: Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen nach Krajewski (2006)

Krajewski versucht mit ihrem Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen die Entwicklung von Zahlverständnis auf drei Ebenen zu beschreiben. In Ebene 1: „Basisfertigkeiten" entwickeln sich beim Kind ein frühes Mengenverständnis und zeitlich parallel ein Bewusstsein für die Zahlwortfolge. Beides sind jedoch voneinander getrennte Bereiche, die vom Kind inhaltlich zunächst nicht aufeinander bezogen werden. Auf der zweiten Ebene, von Krajewski als „Anzahlkonzept" bezeichnet, entwickelt sich zum einen eine Mengenbewusstheit von Zahlen bzw. Zahlwörtern und zum zweiten die Fähigkeit, einfache Mengenrelationen zu verstehen. Auch diese beiden Bereiche entwickeln sich zueinander parallel. Erst auf der dritten Ebene, dem „Relationalzahlkonzept", gehen sie eine Synthese ein. Das Kind begreift nun Anzahlen als zerlegbare und wieder ineinander überführbare Einheiten, die selbst wieder Zahlen sind; das heißt, das Kind hat ein numerisches (anzahlbezogenes) Teile-Ganzes-Verständnis erworben.

Die Entwicklung der Zählfertigkeiten bei Kleinkindern ist ein komplexer Prozess, der aktive und konstruktive Leistungen vom jeweiligen Kind verlangt und an dessen Zustandekommen und Gelingen viele unterschiedliche Faktoren beteiligt sind (vgl. Baroody 1987, Padberg 2004, Gerster und Schultz 2000, Moser Opitz 2001 und andere). Wesentlich sind folgende Aspekte:

- Sequenz - verbale Zahlwortreihe, Zahlwortbildung
- kardinale Bedeutung - Erkennen, dass Zahlwort eine bestimmte Anzahl präzise bezeichnet.
- Zählen - instrumentelles Zählen im Sinne eines problemlösenden Instruments (Abzählen und Auszählen von Objekten, Aufgaben zählend lösen)

4.1.1 Erwerb numerischer Basisfertigkeiten

Auf der ersten Kompetenzebene *Erwerb numerischer Basisfertigkeiten* erwerben Kleinkinder zunächst ein *basales Verständnis im Umgang mit Mengen*, von Krajewski unterteilt in die Bereiche „Mengenbegriff" und „Mengenvergleich" (vgl. Kap. 3). Kinder eignen sich außerdem parallel dazu ein *Wissen über Zahlwörter und die Zahlwortreihe* an, das sie jedoch auf dieser Ebene noch nicht zwangsläufig mit ihrem Wissen über Mengen in Zusammenhang bringen. Beide Bereiche entwickeln sich zwar zeitgleich aber inhaltlich unverbunden. Zur Entwicklung von Mengenverständnis wurde in Kap. 3 Wesentliches herausgearbeitet. An dieser Stelle wird auf die Entwicklung des verbalen Zählens Bezug genommen.

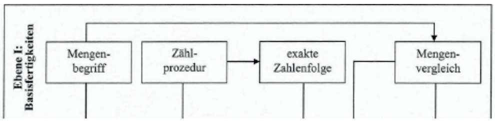


Abb. 13: Basisfertigkeiten: Mengenbegriff und Mengenvergleich, Zählprozedur und exakte Zahlenfolge (Krajewski 2006)

Parallel zur Entwicklung des Mengenverständnisses und des einfachen (direkten) Mengenvergleichs lernen Kinder in der Regel vom zweiten Lebensjahr an Zahlwörter kennen, unterscheiden sie von anderen Wörtern und beginnen damit, die Zahlwortreihe auswendig zu reproduzieren. Mengen- und zahlbezogene Fertigkeiten entwickeln sich auf der Ebene „Basisfertigkeiten" zwar zeitlich parallel, aber inhaltlich relativ unverbunden nebeneinander, so dass Zahlworts und Zahlwortreihe noch nicht mit den dahinterstehenden Quantitäten in Verbindung gebracht werden. In der Praxis bedeutet dies, dass Kinder die Zahlwortreihe noch nicht als Werkzeug zur Anzahlerfassung oder für den Mengenvergleich nutzen. Die Zahlenfolge wird nur manchmal genutzt, um Elemente in eine feste Reihenfolge zu bringen, aber noch nicht zum Ermitteln des „wie viele?".

Der *Erwerb der Zahlwortreihe* wird mehrheitlich als sprachliche (linguistische) Leistung bezeichnet, bei der es noch nicht um ein Verständnis einzelner Zahlwörter geht. Die Zahlwortreihe (der „Zahlenvers") prägt sich durch die immer gleiche Reihenfolge gut ein (vgl. Gerster & Schultz 2000, 327). Es fällt vielen Kindern generell leicht, sich Reihen zunächst bedeutungsloser Wörter einzuprägen, wenn diese regelmäßig, in kurzen Abständen und in einer festgelegten Reihenfolge auftauchen, wie es zum Beispiel bei Fingerspielen und Kinderliedern der Fall ist, die viele Kinder mühelos und beiläufig auswendig lernen, ohne den Inhalt ganz zu verstehen. **Dass Kinder schließlich sicher bis 20 zählen können, bedeutet daher nicht zwingend, dass mit dem Aufsagen der Zahlwortreihe auch ein Verständnis von Anzahlen einhergeht.**

Zunächst beherrschen Kinder die Zahlwortreihe in Form einer auswendig gelernten Folge (Sequenz): Folgerichtig spricht man von einem „Zahlenvers" oder „Zahlengedicht". Die besondere Struktur der Zahlwortreihe und der Sprechweise mehrstelliger Zahlen wird erst im erweiterten Zahlenraum erfahren.

4.1.2 Anzahlkonzept

Auf der nächsten Ebene in Krajewskis Entwicklungsmodell, dem Anzahlkonzept, gehen Mengenbegriff und Zahlenfolge eine Synthese ein. Zunehmend versteht das Kind jetzt, dass Zahlwörter Anzahlen repräsentieren und quantitative Bedeutung haben können. In einer ersten Phase (unpräzises Anzahlkonzept) werden Zahlwörter jedoch noch nicht mit exakten Anzahlen in Verbindung gebracht, sondern zunächst unbestimmten Mengenbegriffen zugeordnet (wenig - viel - sehr viel). Auf der Stufe des *präzisen Anzahlkonzepts* verstehen Kinder schließlich, dass die Anzahl stets exakt mit der ausgezählten Menge korrespondiert, dass dieser Menge die zuletzt genannte Zählzahl zugewiesen wird und daraus eine exakte quantitative Ordnung resultiert. Die Zahlenfolge wird als exakte Anzahlfolge erkannt, es entwickelt sich ein präzises Anzahlkonzept. Mengen und (An-)Zahlen können nun mit Hilfe des Zählens nach ihrer „Größe" verglichen werden (vgl. Krajewski 2006 und 2008).

Die *Genügsamkeit* des Bewusstseins ‚viele' weicht der *Gewissenhaftigkeit* des Bewusstseins ‚wie viele?'. (Kühnel 1966, 33).

Empirische Befunde von Wynn (1990, 1992) verdeutlichen, dass zunächst die Zahlwörter eins, zwei und drei einzeln erlernt werden. Zunächst steht dabei das Zahlwort *drei* vermutlich für „viele" und hat eine eher unscharfe Bedeutung, ist also noch nicht an eine konkrete Anzahl gebunden. Erleben Kinder dann aber zunehmend, dass Zahlwörter im Alltag betont und *„die Vorteile zählbarer Mengen gegenüber kontinuierlichen Mengen anschaulich erfahrbar [werden], so erleichtert dies den Aufbau von mentalen Modellen für die Anzahlen eins, zwei und drei"* (Dornheim 2008, 59, Baroody 2009). Diese Modelle werden durch häufig wiederkehrende Erfahrungen in Alltagssituationen zunehmend stabiler und flexibler. Dies ist ein bedeutender Schritt hin zu einem *präzisen Anzahlkonzept im Sinne Krajewskis.*

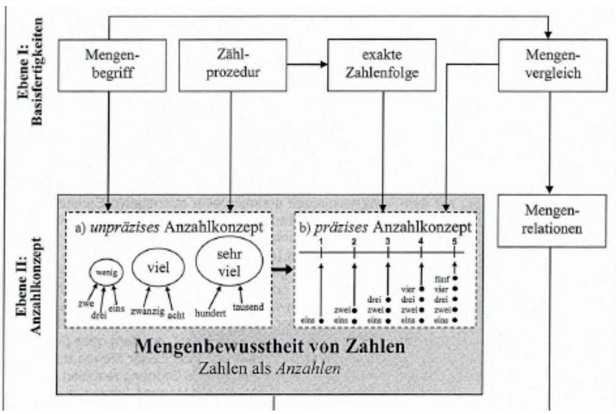


Abb. 14: Mengenbewusstheit von Zahlen: Präzises und unpräzises Anzahlkonzept

Der Erwerb der Zahlwortreihe ist in der Regel im Alter von fünf bis sieben Jahren für den Zahlenraum bis 20 und das verbale Zählen weitgehend abgeschlossen. Schmidt und Weiser (1982, zit. nach Schmidt 2003) berichten, dass 97 Prozent aller Schulanfänger das Aufsagen der Zahlwortreihe bis mindestens 10 beherrschen. Mehr als zwei Drittel der Kinder zählen bereits bis 15, 20 oder darüber hinaus. Das bedeutet allerdings nicht zwingend, dass alle die Zahlwortreihe als problemlösendes Instrument zum Ermitteln von Anzahlen einsetzen oder zählend rechnen können. Dennoch weisen Schmidt und Weiser zu

Recht darauf hin, dass Schulanfänger bereits mit einer gewissen Zählkompetenz in die Schule kommen und damit auch eine Erwartung an den Unterricht verbinden, die als Motivationspotential genutzt werden kann und sollte. Lesenswerte Ausführungen zum Forschungsstand der Zählfertigkeit von Schulanfängern aus fachdidaktischer Sicht finden sich bei Schmidt (2003).

4.1.3 Zählprinzipien

Entwicklungsschritte und Niveaustufen des verbalen Zählens wurden in den vergangenen Jahren ausführlich beschrieben und untersucht. Hier spielen insbesondere die *Zählprinzipien* sowie das *Niveaustufenmodell* nach Fuson eine prominente Rolle. Beides wird nachfolgend zusammengefasst dargestellt (zusammenfassend Schmidt 2003 und Padberg 2004, Kap. 1-3).

Soll das Zählen über das rein verbale Aufsagen der Zahlwortreihe hinausgehen, müssen dabei bestimmte elementare Regeln beachtet werden, die als **Zählprinzipien** Eingang in die fachdidaktische Literatur gefunden haben.

Die ersten vier Prinzipien beschreiben die **elementaren Handlungsaspekte,** aus denen sich die Zählfähigkeit zusammensetzt, das **„How to count"**. Nachfolgend werden die Zählprinzipien jeweils beschrieben. In einem weiteren Unterkapitel werden Möglichkeiten aufgezeigt, die Beachtung der Zählprinzipien zu diagnostizieren bzw. zu fördern.

- **Einszueinsprinzip:** Jedem der zu zählenden Objekte wird *genau ein Zahlwort* zugeordnet.
- **Prinzip der stabilen Ordnung: D**ie Reihe der Zählwörter hat eine *feste Ordnung*, das heißt die Folge der Zählzahlen ist immer gleich.
- **Prinzip der Einmaligkeit:** Jedes genannte Zählwort bezeichnet *ein und nur ein Element*. Jedes zu zählende Objekt wird mit genau einem – von allen anderen verschiedenen – Zählwort bezeichnet (also *nicht*: eins, *zwei, zwei*, drei).
- **Kardinalzahlprinzip:** Das beim Zählprozess *zuletzt genannte Zählwort* bezeichnet zugleich die Anzahl der Elemente der gezählten Menge (*last-word-rule)*.

Die beiden letzten Prinzipien beschreiben den **Anwendungsbereich**, *bzw. die* **Flexibilität** *des Zählvorgangs, das* **„what to count".**

- **Abstraktionsprinzip:** Unabhängig von Größe, Farbe, Gewicht und anderen Eigenschaften können *beliebige Elemente* zu einer Menge zusammengefasst und gezählt werden.
- **Prinzip der beliebigen Reihenfolge (Anordnungs-Irrelevanz-Prinzip):** Es ist beliebig, in welcher Reihenfolge die Objekte gezählt werden und wie sie dabei angeordnet sind.

> Zählprinzipien werden im Unterricht nicht eigens thematisiert. Sie zu kennen ist aber hilfreich für Lehrer und Lehrerinnen, um bei Zählaufgaben auf eventuell auftretende Schwierigkeiten aufmerksam zu werden und/oder den Entwicklungsstand einzelner Schüler und Schülerinnen zu diagnostizieren.

4.1.4 Niveaustufen des verbalen Zählens

Im Laufe der kindlichen Entwicklung wächst der verfügbare Abschnitt der Zahlwortreihe kontinuierlich. Im schulischen Mathematikunterricht schlägt sich dies dadurch nieder, dass der Zahlenraum bis in die Sekundarstufe hinein immer wieder erweitert wird (idealtypisch: 1. und 2. Schuljahr: Zahlenraum bis 20, dann bis 100, 3. Schuljahr: Zahlenraum bis 1000, 4. Schuljahr: Zahlenraum bis 1 Million, 5. Schuljahr: Zahlenraum nach oben unbegrenzt).

Nach Fuson et al. (1988) lassen sich idealtypisch fünf Niveaustufen des verbalen Zählens unterscheiden, die nachfolgend erläutert werden. Der Weg vom bloßen Aufsagen der verbalen Zahlwortreihe bis hin zum einsichtsvollen Zählen und dem Verstehen des Anzahlkonzepts ist ein längerer Entwicklungsprozess und keineswegs trivial.

Niveau 1: Phase der undifferenzierten Ganzheitsauffassung (string level)

Die Zahlwortreihe wird als Ganzes unstrukturiert verwendet. Für das Kind hat sie die Form „einszweidreivierfünfsechs ...". Einzelne Zahlwörter können nur durch Aufsagen der ganzen bekannten Reihe angegeben werden. Die Zahlwortreihe kann nur mit großen Einschränkungen erfolgreich zum Zählen eingesetzt werden, da das **Eindeutigkeitsprinzip** noch nicht sicher beherrscht wird. Kinder scheinen dadurch motiviert zu werden, die Zahlwortreihe zu erlernen, dass ihre Eltern und andere Kinder anscheinend ein besonderes Vergnügen daran haben, diese Reihe immer wieder aufzusagen (Fuson et al. 1982, auch Munn 1997). Niveaustufe 1 ist in Krajewskis Entwicklungsmodell der ersten Ebene (Numerische Basisfertigkeiten) zuzurechnen und entwickelt sich in der Regel im Kindergartenalter.

Niveau 2: Phase der differenzierten Ganzheitsauffassung (unbreakable chain level)

Einzelne Zahlwörter werden klar voneinander unterschieden. Die Reihe wird aber stets aufs Neue von vorn aufgesagt, Weiterzählen von einer bestimmten Zahl an ist noch nicht möglich. Zunehmend können mithilfe des Zählens Anzahlen ermittelt werden. Dabei berühren oder zeigen fast alle Vorschulkinder die zu zählenden Objekte. Problematisch sind zweisilbige Zahlwörter wie sieben (7), bei denen manchmal auf zwei Elemente gedeutet wird.

Kinder können auf diesem Niveau einfache Fragen beantworten wie: *„An welcher Stelle kommt …?"* (Ordinalzahlaspekt); *„Wie viele ... (Körbe voll Äpfel, Kisten mit Spielzeugautos, ...)?"* (Kardinalzahl- und Maßzahlaspekt). Erste einfache Plus- und Minusaufgaben können zählend gelöst werden. Dabei wird das Prinzip des „Alleszählens" angewendet: Bei Aufgaben wie 5 + 3 legt das Kind zuerst beide Mengen vor sich und zählt sie dann von Anfang an durch. Durch das Aufsagen der Zahlwortreihe können auch Aussagen über Kleiner- und Größerrelationen zwischen Zahlen gewonnen werden, beispielsweise in der Form, dass 5 vor 7 kommt und deshalb kleiner ist als 7. Diese Niveaustufe haben viele Schulanfänger bereits erreicht.

Niveau 3: Phase des Weiterzählens (breakable chain level)

Die Zahlwortreihe kann jetzt *von größeren Zahlen aus* aufgesagt werden („Fange bei 5 an zu zählen."). *Weiter- und Rückwärtszählen* gelingt („Zähle von 7 an vorwärts/rückwärts"), ebenso das *Vor- und Zurückzählen zu einer größeren oder kleineren Zahl* („Zähle von 5 bis 14"; „Zähle zurück von 13 bis 7"). Aussagen über *Kleiner-/Größerrelationen* werden sicherer und schneller getroffen, *Additions- und Subtraktionsaufgaben* können weiterzählend „effektiver" gelöst werden; so zählt das Kind bei 5 + 3 nicht mehr die Anzahl des ersten Summanden, sondern zählt ab 5 weiter: „6, 7, 8".

Niveau 4: Phase der Auffassung der Zahlwörter als zählbare Einheiten (numerable chain level)

Von einer Zahl aus kann um eine vorgegebene Anzahl weitergezählt werden („Zähle von 6 um *drei* Schritte weiter.") Die Zahlwortreihe wird also nicht mehr ausschließlich zum Zählen von konkreten Dingen eingesetzt. Das Kind kann auch angeben, wie viel man von einer bestimmten Zahl (5) bis zu einer größeren Zahl (9) weiterzählen muss (problematisch: wo beginnen?). Um das siebte Lebensjahr herum entwickelt das Kind entsprechende Fertigkeiten im Zurückzählen.

Niveau 5: Phase der zweiseitigen Durchlaufbarkeit der Zahlwortreihe (bidirectional chain level):

Jetzt können Kinder flexibel, von jedem bekannten Zahlwort aus, vor und zurück sowie in Schritten zählen. Auch der innere Zusammenhang von Plus- und Minusaufgaben wird deutlich.

Bisher ist wenig bekannt über die Übergänge zwischen den einzelnen Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe. Unklar ist auch, ob sich beispielsweise Niveau 4 und 5 voneinander unabhängig entwickeln, ob das eine die zwingende Voraussetzung des anderen ist usw.

Da das Kind die Beherrschung der Zahlwortreihe immer weiter ausdehnt (immer größere Zahlen kennen lernt), kann ein und dasselbe Kind sich zur selben Zeit innerhalb verschiedener Teilabschnitte der Zahlwortreihe auf verschiedenen Niveaus befinden. So hat es bei den ersten Zahlen der Reihe vielleicht schon das höchste Niveau erreicht, während es sich weiter hinten in der Zahlwortreihe noch auf niedrigeren Niveau befindet (vgl. Padberg 2005).

4.2 Zählen im Anfangsunterricht?

Rabatz, Schipper et al. (1998, 54) berichten davon, dass es in der Geschichte der Rechenmethodik Bestrebungen gab, „*den gesamten Rechenunterricht vom Zählen und zählenden Rechnen her zu entwickeln, aber auch Zeiten, in denen das Zählen nicht nur verpönt war, sondern den Kindern regelrecht verboten wurde*".[6] Es handelte sich dabei um einen erbitterten Streit zwischen der Gruppe der Zahlbildmethodiker und der Gruppe der Zählmethodiker (vgl. Lorenz 1995). Heutzutage wird der Stellenwert des Zählens im Mathematikunterricht differenzierter gesehen. Die Zahlwortreihe zu kennen, ist eine zentrale Voraussetzung für den Aufbau eines sicheren Anzahlkonzepts.

Mit dem Aufsagenkönnen der Zahlwortreihe geht jedoch nicht zwingend ein Verständnis für Zahlen allgemein und insbesondere für Anzahlen einher. Kühnel bemerkte, dass zahlreiche Kinder bei Schuleintritt „*weder eine Vorstellung von 4 Dingen noch erst recht einen Zahlbegriff 4 hatten, obwohl das eine von ihnen auch noch in Hausnummer 4 wohnte und dies auf Befragung auch anzugeben wusste.* **Mit dem Zahlwort ist nie und nimmer der Zahlbegriff gegeben.** *Der muss erst erworben werden und er wird gemeinhin erworben, nachdem das Zahlwort unseren Kindern längst bekannt ist.*" (Kühnel 1966, 22).

Schon zu Kühnels Zeiten war Heterogenität im Anfangsunterricht der Volksschule ein Thema und so berichtet er unter Verweis auf psychologische Untersuchungen seiner Zeit, dass sich bei Schuleintritt immer sowohl Kinder fänden, deren Verständnis mindestens bis 10 reicht, während bei anderen

[6] Zur Geschichte der Einführung des Faches Mathematik an Grundschulen anstelle des früheren „Rechenunterrichts" und zur überaus kontroversen Diskussion um die Einführung der „Mengenlehre" gibt es einen ebenso unterhaltsamen wie informativen Artikel aus der Wochenzeitschrift ‚Der Spiegel'. (Heft 13/1974) Dieser ist verfügbar unter: http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784469.html (09/2014).

Kindern selbst das Verständnis für kleinste Anzahlen wie 3 oder 4 noch im Aufbau begriffen ist. Wittmann (2001) weist darauf hin, dass grundlegende numerische Kenntnisse von Schulanfängern häufig über- statt unterschätzt werden. Lorenz (1997, 7) macht darauf aufmerksam, dass der Unterschied zwischen den Schülern bereits bei Schuleintritt immer stärker zutage tritt: *„So kommen einige erwartungsfroh mit der Kenntnis der Zahlen bis Hundert oder gar Tausend und stolzen Rechenfähigkeiten in die erste Klasse, um dort auf andere zu treffen, die nicht bis fünf zählen, geschweige denn Ziffern lesen und schreiben können."* Diese Unterschiede aufzufangen und, wo möglich, auszugleichen beziehungsweise „beiden Herausforderungen gleichermaßen gerecht zu werden" (Lorenz a.a.O.), gehört zu den Aufgaben des Anfangsunterrichts und soll hier weder bagatellisiert noch dramatisiert werden.

Kernideen („Big Ideas" des Zählens)

1. Wenn man zählt, weiß man hinterher, **wie viele** Objekte **in einem „Set"** sind.
2. Zählt man eine Reihe von Dingen/Objekten, bezeichnet das **zuletzt genannte Zählwort** die Anzahl der gezählten Dinge *(last word rule).*
3. Zahlen stehen in **vielfacher Verbindung mit anderen Zahlen**. 7 zum Beispiel ist *mehr als* 4, aber *weniger als* 9, *genauso viel wie* „4 und 3" und auch „5 und 2", *drei weniger als 10*, sieben kann schnell in einem Punktemuster wieder erkannt werden usw. Diese Vorstellungen und Ideen sind nützlich, um ein *Verständnis* beispielsweise von 17, 57, 700 und 170 aufzubauen.
4. **Zahlenvorstellungen** sind eng mit der **Welt** um uns her verbunden. Die Fähigkeit, Zahlvorstellungen auf die Umwelt zu übertragen, anzuwenden und dort wieder zu entdecken, bedeutet, Zahlen und Mathematik in der Welt zu entdecken und als sinnvoll zu erleben.

Zählaufgaben

Kühnel betont an mehreren Stellen, dass das Zählen im Mathematikunterricht ein „wirkliches Zählen" sein müsse und beschreibt zwei Merkmale förderlicher Zählaufgaben (1949, 22f.):

1. Es muss sich um **sinnvolles, „dingliches" Zählen** handeln: „Alles Zählen muss einer bestimmten sinnvollen Aufgabe entsprechen, nämlich festzustellen, wie viel von einer bestimmten Sache vorhanden ist."
2. Die gezählte Menge muss abschließend unbedingt zu einer **Ganzheit** umschlossen werden, gestisch, durch Umfahren mit der Hand *und* durch verbales Zusammenfassen: „Auf diesem Bild grasen fünf Pferde; Da liegen acht Plättchen." usw. Hier liegt möglicherweise ein zentraler, aber noch wenig beachteter Schritt zur Verknüpfung von Teile-Ganzes-Verständnis und Zählfertigkeit.

Zählaufgaben kommen außerdem in unterschiedlichen **Abstraktionsformen** vor.

1. Zählen wirklicher Dinge in der Umgebung des Kindes.

2. **Zählen dinglicher Symbole[7].** Hierzu besitzt jedes Kind im Anfangsunterricht eine Schachtel mit einer Sammlung von Sachen: Kastanien, Muscheln, Kerne, Steine, Spielmünzen, Plättchen, Knöpfe usw. und eine Schachtel mit kleinen Stöckchen oder abgebrannten Zündhölzern. Kühnel beschreibt den Einsatz von dinglichen Symbolen im Anfangsunterricht.

   > „Damit spielen wir Eisenbahn. Jetzt ist der Zug angekommen. Alles aussteigen! Das Kind schüttet die Schachtel aus: Oh, die vielen Leute! – Die werden nun gezählt. Die Kinder berichten, wie viele ‚Leute' (Zündhölzer) in ihrem ‚Zug' (Schachtel) gefahren sind. Nachher wird der neue Zug zusammengestellt. Da steigen 17 Menschen ein. Auszählen! Nun wird auch gepfiffen – das ist nötig bei Kindern dieses Alters. Dann kommt er zur ersten Station – die wird selbstverständlich genannt. Da steigen 7 Leute aus. Heraus mit den sieben! 5 andere wollen einsteigen, hinein mit euch! Dann fährt er weiter. (…) Und es braucht ja nicht bloß Eisenbahn zu sein (...) Damit ein Rest von Anschauung in diesen Symbolen sei, benützen wir für Heringe die länglichen Streichhölzer, für rundliche Gegenstände wie Apfelsinen, Seife usw. die Kastanien. Auf diese Art gelingt es uns, die Kinder durch Handlung hineinzuführen ins Rechnen" (a.a.O., 30).

3. **Zeichnungen („Dingbilder"):** Diese werden von den Kindern selbst erstellt, wobei auf Details verzichtet wird und die Darstellungen zunehmend schematisch werden, von Strichmännchen zu Linien mit angedeutetem Kopf usw.

4. **Graphische Symbole:** Die Symbole „schrumpfen immer mehr zusammen". Schließlich bleiben nur Kreise und Striche übrig. Menschen, Bäume, Bleistifte usw. werden durch Striche repräsentiert. Brötchen, Rosinen, Äpfel usw. durch Kreise.

Kühnel (1966, 83) unterscheidet weiterhin zwischen Aufgaben zur **Zahlauffassung** und zur **Zahldarstellung.** Er betont, dass die Aufmerksamkeit In beiden Fällen unterschiedlich gerichtet ist. Bei der *Zahlauffassung* ist die *Sachvorstellung einer Menge gegeben* und dazu das Aufgabenbewusstsein mit der Frage „Wie viele?", das heißt, eine Gesamtanzahl muss bestimmt werden. Im zweiten Fall, der *Zahldarstellung,* ist die geforderte Anzahl („*Zahlgröße"*) gegeben und es soll eine *Sachmenge* festgestellt werden, die dieser Zahlgröße entspricht. Aufgaben zur Zahlauffassung werden durch *Abzählen* gelöst, Aufgaben zur Zahldarstellung durch *Auszählen.*[8]

Radatz, Schipper et al. (1996, 58) haben für den Anfangsunterricht Kühnels methodische Anregungen behutsam der heutigen Zeit angepasst und in einer Tabelle zusammengefasst. Wir haben diese Tabelle auf der folgenden Seite übernommen und ergänzt.

Weitere praktikable und umsetzbare Vorschläge für den Mathematikunterricht finden sich in Rabatz, Schipper et al. (1996).

Eine Sammlung von Arbeitsaufträgen und Kopiervorlagen findet man unter: http://www.atlasmathe.ch/AMA_DB/application/ama_attachments/LB/LB1_Zahlen.pdf

---

[7] Kühnel meint mit „dinglichen Symbolen" Alltagsdinge und -Gegenstände wie Steine, Kastanien usw., die dadurch zu „dinglichen Symbolen" werden, dass sie in den Augen des Kindes symbolisch für etwas anderes stehen, das heißt zu Repräsentanten für gedankliche Vorstellungen werden. Gefördert wird dadurch die Bildung von Vorstellungen und innerer Bilder. Als dingliche Symbole können auch Wendeplättchen oder ähnliches Material herangezogen werden.

[8] Die Begriffe Abzählen und Auszählen werden in der fachdidaktischen Literatur nicht einheitlich, teilweise sogar entgegengesetzt verwendet. Beispielsweise widersprechen sich Schmidt (2003) und Gerster und Schultz (2000). Für die Unterrichtspraxis ist die begriffliche Unterscheidung zum Glück nicht sonderlich relevant. Jedoch sollten Lehrerinnen und Lehrer beachten, dass im Mathematikunterricht Aufgaben- und Problemstellungen sowohl zur Zahldarstellung als auch zur Zahlauffassung gestellt und bearbeitet werden. In der vorliegenden Handreichung werden in Anlehnung an Gerster und Schultz (2000) Aufgaben zur Zahlauffassung durchgehend als Abzählen bezeichnet, Aufgaben zur Zahldarstellung dagegen als Auszählen.

Zählen

Zahlauffassung		Zahldarstellung	
Zählen wirklicher Dinge			Zählen wirklicher Dinge
mit Ortsveränderung	Abzählen der gelieferten Milch- und Kakaoflaschen: Jede gezählte Flasche wird aus dem Korb genommen.	10 Kegel aufstellen, 5 Bälle in einen Korb legen, Vierergruppen bilden;	mit Ortsveränderung
ohne Ortsveränderung			ohne Ortsveränderung
- bloß mit Tippen	Die Bilder einer Buchseite abzählen: Jedes Bild wird beim Abzählen angetippt.	4 Bälle malen, 3 Häuser, 8 Sterne …	• Dinge malen
- bloß mit Zeigen	Spielgeräte auf dem Schulhof zählen, dabei jeweils auf das gezählte Gerät zeigen.	In die Luft malen: 2 Äpfel, 3 Räder, ..	Zählen mit pantomimischer Darstellung
- ohne Zeigen, nur mit Anschauen			
• statische Objekte	Fahrräder im Fahrradständer, Autos auf dem Parkplatz zählen, dabei beim Zählen den Blick wandern lassen, das Zählen durch Kopfnicken begleiten.	Sechs Autos auf einem Parkplatz. Welche Farbe haben sie? Wie viele rote? wie viele von jeder Farbe? Wie viele stehen rechts/ links?	eine bestimmt Anzahl von Dingen sich vorstellen
• bewegte Objekte	Fußgänger und vorbeifahrende Fahrzeuge abzählen. Vorbeifliegende Vögel zählen.		
Zählen „dinglicher Zahlsymbole“			Zählen „dinglicher Zahlsymbole“
Aufgabenstellungen wie oben: Zählen mit und ohne Ortsveränderung, mit und ohne Tippen, Zeigen, Anschauen.	Als Zählobjekte zunächst Alltagsgegenstände nehmen, dann zunehmend ersetzen durch didaktische Materialien wie Wendeplättchen usw.	Als Zählobjekte zunächst Alltagsgegenstände nehmen, dann zunehmend ersetzen durch didaktische Materialien wie Wendeplättchen usw. Mit diesen Materialien wird gelegt, gemalt, sie werden vorgestellt …	Aufgabenstellungen wie oben: Zählen mit und ohne Ortsveränderung, mit und ohne Tippen, Zeigen, Anschauen.
Zählen nur vorgestellter Objekte	Stell dir dein Kinderzimmer vor. Zähle die Bilder an der Wand.	Stell dir fünf Puppen, Häuser, … vor …	Zählen nur vorgestellter Objekte

Tabelle in Anlehnung an Rabatz u.a

4.3 Zählfähigkeit diagnostizieren

Material: Dinge zum Zählen, wie Murmeln, Kastanien, Muscheln, Wendeplättchen usw.

Aufgabenstellungen (Vorschläge entnommen aus Gerster und Schultz, 2000, 249)

Bevor man die folgenden Aufgaben vorlegt, sollte man prüfen, ob das Kind die Zahlwortreihe bis 10/20 sicher aufsagen kann. Es geht jetzt um die Überprüfung der Zählprinzipien: Macht das Kind beim Abzählen deutlich, dass es eine Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwort und Element oder Zahlwort und Bewegung (zum Beispiel beim Gehen, Hüpfen oder Klatschen) vornehmen will? Benennt es – auch nach einer räumlichen Veränderung der Menge – die Anzahl der Menge nach dem letzten Zahlwort, das es beim Abzählen gebrauchte (Kardinalitätsprinzip)?

Zahlauffassung: Sachvorstellung in Zahlgröße übersetzen

Das Kind soll feststellen, wie viele Steine auf dem Tablett liegen oder man gibt dem Kind eine Anzahl von Plättchen und fragt: „Wie viele sind das?“ Nach dem Abzählen werden sie in eine Schachtel gefüllt. „Wie viele Steine sind in dieser Schachtel?“ Oder: „Schreibe auf den Deckel, wie viele Steine in dieser Schachtel sind.“ Wenn das Kind noch nicht schreiben kann: „Soll ich es für dich schreiben? Sag mir, was ich schreiben soll.“

Eine Puppe zählt eine Menge und beachtet dabei nicht alle Zählprinzipien. Daher kommt sie zu einem anderen Ergebnis als das Kind (oder eine zweite Puppe, die richtig zählt). „Hat die Puppe richtig gezählt?“ Oder „Warum bekommt sie etwas anderes heraus als Du?“

Wiederholt das Kind beim Abzählen das letztgenannte Zahlwort, kann man davon ausgehen, dass es den Wechsel vom ordinalen zum kardinalen Gebrauch des letzten Zahlworts verstanden hat. Es kommt vor, dass Kinder sich um die Eins-zu-Eins-Zuordnung bemühen, dabei aber Schwierigkeiten haben. In diesem Fall ist die Bedeutung des Prinzips erfasst.

Wenn das Kind die Anzahl nach dem Umfüllen in die Schachtel nicht unmittelbar angibt, sondern erneut zählen will, kann man fragen, ob es noch weiß, bis zu welcher Zahl es vorhin beim Abzählen gekommen ist, um auszuschließen, dass es die Zahl bloß vergessen hat.

Zahldarstellung: Zahlgröße in Sachmenge übersetzen

Das Kind soll aus einer Schale eine Anzahl von Objekten (Murmeln, Autos, Nüsse etc.) auszählen, zum Beispiel fünf Murmeln.

Hinweise: Hält das Kind die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwort und Gegenstand ein? Merkt es sich die Zahl, bis zu der es zählen sollte und hört es rechtzeitig mit dem Zählen auf? Weiß es, dass bei zweisilbigen Zahlwörtern wie „sieben“ oder „dreizehn“ nur ein Element gezählt wird?

4.4 Zählen fördern

Die Aufmerksamkeit des Kindes auf die Anzahl lenken

Kinder, die noch ohne Beachtung des Eins-zu-eins-Prinzips zählen, tun dies auf Grundlage *ihres aktuellen Verständnisses. Lediglich* die Zahlwortreihe immer wieder aufsagen lassen, korrigiert daran nichts!

Zählfehler werden korrigiert durch Nachfragen, zum Beispiel durch ein fragendes Vergleichen mit dem Resultat anderer Kinder oder mit unterschiedlichen Zählergebnissen desselben Kindes („Zähl zur

Sicherheit noch einmal nach“). Diese Fragen werden auch dann gestellt, wenn das Kind bereits richtig gezählt hat, so dass es nicht den Eindruck bekommt, es sei ein Zeichen dafür, dass es etwas falsch gemacht habe, wenn es gefragt wird.

Es ist außerdem möglich, selbst Zählfehler zu produzieren (oder durch eine Puppe o.ä. produzieren lassen) Ebenso kann ein übertriebenes Zähl- und Zeigeverhalten als Diskussionsanlass genommen werden. Schließlich sollte man mit den Kinder sammeln, *worauf man beim Zählen achten muss.*

Zählen muss bedeutungsvoll für Kinder sein!

Zählanlässe schaffen

- Rhythmisches Zählen, Zählen in Einer-, Zweier, Fünfer- und Zehnerschritten. Von einer gegebenen Zahl vor oder zurück zählen, auch dies in Schritten.
- Zählübungen mit Bewegungen koppeln: In einer Reihe sitzend beim Vorwärtszählen aufstehen, beim Zurückzählen hinsetzen.
- Zählübungen koppeln mit Ball-Tippen, Ball-gegen-die-Wand-werfen, Seilspringen usw.: „Solche Übungen helfen Kindern, Vertrautheit, Geläufigkeit und Routine im Umgang mit der Zahlwortreihe zu erwerben.“ (Gerster und Schultz 2000, 329).
- Täglich alle Kinder der Gruppe zählen – wie viele Kinder sind da? Wie viele fehlen?
    - Schulranzen, Federmäppchen (und Inhalt), ... zählen;
    - Klassenzimmer und Schulhaus (wie viele Türen auf einem Stockwerk?, Wie viele Treppenstufen? Wie viele Schritte vom Eingang bis zum Klassenzimmer? Wie viele Fenster im Klassenzimmer,…);
    - Eigenschaften der Kinder zählen (wie viele Finger, wie viele Nasen, Füße, Hände, Brillen, blonde, blauäugige, … Kinder? Wie viele rote T-Shirts? Wie viele mit Hund als Haustier?, ...)
- **Material für interessante Zählhandlungen** bereitstellen, um das Interesse der Kinder anzusprechen: schöne Fundstücke, Bilder, Münzen usw. **Interesse ist eine Voraussetzung für gerichtete Aufmerksamkeit.**
- Anzahlbilder und Ziffernkärtchen nach der Größe ordnen.
- **Zählen als Überprüfung von Schätzungen:** Dadurch wird ein Verständnis für das Messen angebahnt.
- **Schätzgläser** füllen und ausstellen: Jedes Kind bringt von zu Hause „genau 10 von einer Sorte“ mit. Jeweils in einen Kasten oder Glas füllen und ausstellen. Als Sprechanlass nutzen – *es sind immer zehn, aber das Glas ist ganz unterschiedlich voll.* Beim Erweitern auf den Hunderterraum das gleiche mit je 100 Objekten einer Sorte machen.

4.5 Was tun, wenn Kinder Probleme mit der Zahlwortreihe haben?

Zahlbildanker nach Buschmann

Heide Buschmann, Schulpsychologin aus Waldshut-Tiengen, schlägt vor, kleine Zahlen (bis maximal 12) aus der Welt des Kindes zu thematisieren und „Zahlbildanker“ zu gestalten.

Diese sollten jeweils durch entsprechende Würfelbilder, Fingerbilder und Zehnerfelder ergänzt werden. Man kann damit unterschiedliche Spiele erstellen (Memory, Domino, Lotto, Bingo usw.).

2 – Zwillinge, Augen, Ohren, Arme, Hände, Beine, Füße, Strümpfe, Handschuhe, Schlittschuhe, Brille, Fahrrad, ...

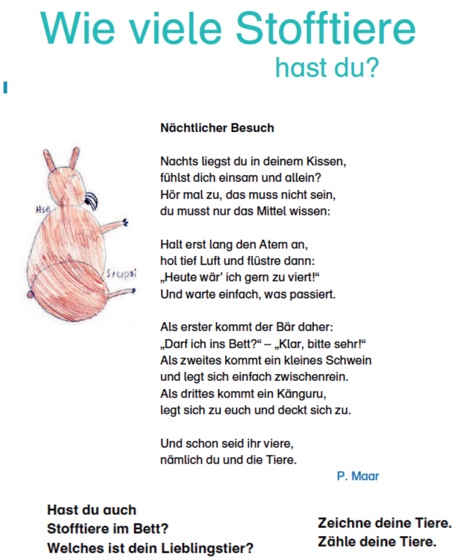
3 – Ampel, Kleeblatt, Dreirad, „Mutter, Vater, Kind“, ...

4 – Adventskranz, Tisch, Hund, Auto (mit Betonung der Beine, Räder usw.),

5 – Hand, Fuß, ...

6 – Marienkäfer (Beine, Punkte auf Flügeldecken), kleiner Eierkarton, ...

Kinderreime und -lieder mit Zahlen



Wie viele Stofftiere
hast du?

Nächtlicher Besuch

Nachts liegst du in deinem Kissen,
fühlst dich einsam und allein?
Hör mal zu, das muss nicht sein,
du musst nur das Mittel wissen:

Halt erst lang den Atem an,
hol tief Luft und flüstre dann:
„Heute wär' ich gern zu viert!“
Und warte einfach, was passiert.

Als erster kommt der Bär daher:
„Darf ich ins Bett?“ – „Klar, bitte sehr!“
Als zweites kommt ein kleines Schwein
und legt sich einfach zwischenrein.
Als drittes kommt ein Känguru,
legt sich zu euch und deckt sich zu.

Und schon seid ihr viere,
nämlich du und die Tiere.

P. Maar

Hast du auch Stofftiere im Bett? Welches ist dein Lieblingstier?

Zeichne deine Tiere. Zähle deine Tiere.

Abb. 15: Gedicht (atlasmathe.ch)

Morgens früh um sechs
kommt die kleine Hex'.
Morgens früh um sieben
schabt sie gelbe Rüben.
Morgens früh um acht
wird Kaffee gemacht.
Morgens früh um neun
geht sie in die Scheun'.
Morgens früh um zehn
holt sie Holz und Spän',
feuert an um elf,
kocht dann bis um zwölf.
Fröschebein und Krebs und Fisch,
hurtig Kinder, kommt zu Tisch!
(Volksgut)

Spiele zur Zahlwortreihe

Aktionsspiel zur Zahldarstellung: Anzahlen durch Bewegungen und Aktionen darstellen.

Material: Ereigniskarten, großer Schaumstoffwürfel

Spiele zu Zahlen in Umwelt und Alltag

Material: Spielplan und Ereigniskarten, Spielwürfel, Spielfiguren

Spielverlauf: Reihum wird je nach gewürfeltem Feld eine Ereigniskarte gezogen und bearbeitet: „Blume" steht für Alltagswissen, Smileys stehen für Scherzfragen und „Buch" für Fragen zu Geschichten oder Bilderbüchern.

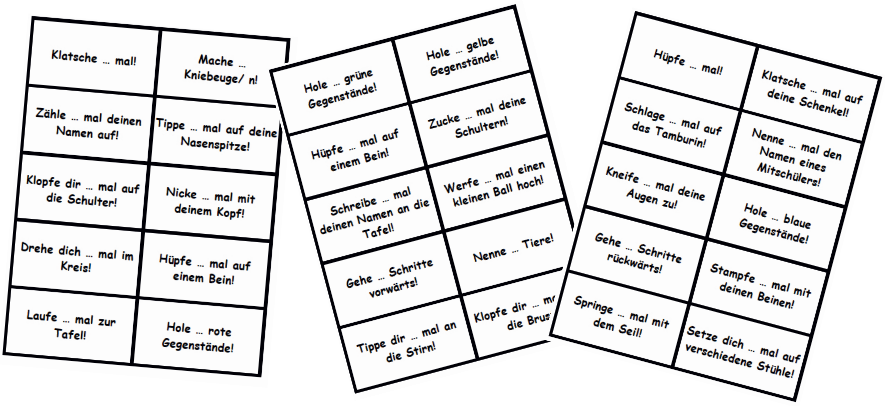
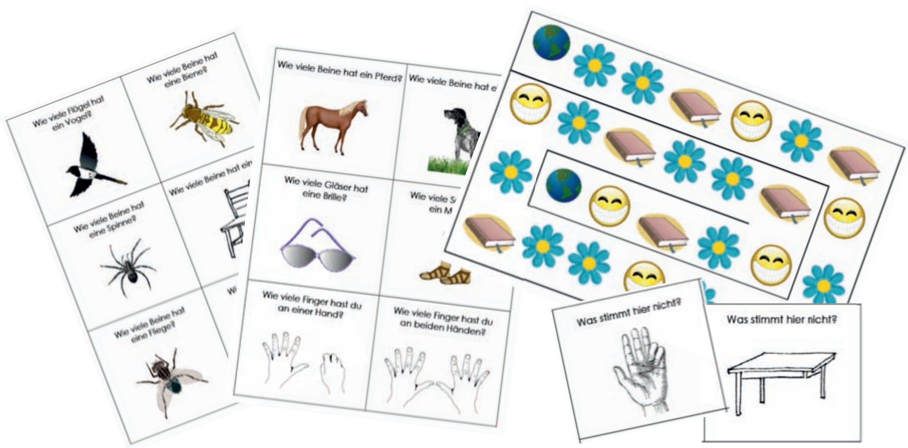


Abb. 16 (oben) und 17: Kopiervorlagen, die im Rahmen des Tagespraktikums von Studierenden erstellt wurden



Weitere Vorschläge und Tipps:

Bilderbücher betrachten (zum Beispiel Wimmelbilderbücher; „Ten in the bed"; „Fünfter sein", usw.), über Situationen und Anlässe sprechen, in denen (An-)Zahlen und Ziffern im Alltag eine Rolle spielen.

Kopiervorlagen zu Gedichten, kleinen Geschichten und Anregungen rund um Zahlen finden sich zum kostenlosen Download unter http://www.atlasmathe.ch/AMA_DB/application/ama_attachments/LB/LB1.pdf.

Kinder begegnen Mathematik – „Das Bilderbuch" (Lehrmittelverlag des Kantons Zürich). Mit Bildern von Corinne Schroff, geeignet für Kinder ab 4 Jahren.

4.6 Ziffern schreiben und lesen

Kognitive Bedingungen für den Aufbau des Verständnisses symbolischer Notationen von (einstelligen) Zahlen und Quantitäten

- Vorstellung von Kardinalität möglichst im Sinne gegliederter Anzahlen (z. B. 8 als „5 und 3", im Sinne des römischen Zahlzeichens VIII als Zusammensetzung aus 5 und 3, usw.);
- Kenntnis der Zahlwörter von Eins (bzw. Null) bis Neun (Zehn)
- sicheres Zuordnen von Anzahl und Zahlwort;
- Sicheres Unterscheiden von Zahlzeichen (Bedeutungsträger) und Buchstaben (Lautträger);
- Sicheres Unterscheiden der Gestalt der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- vorstellungs- und gedächtnismäßige Verbindung von *Zahlwort*, *Quantität* und entsprechendem *Zahlzeichen* (Zifferndarstellung).

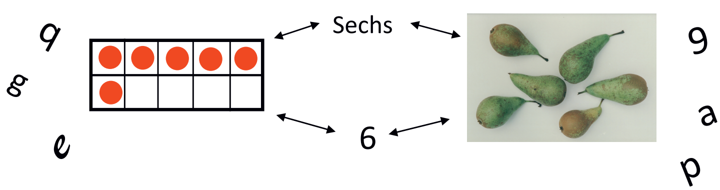


Abb. 18: Kogniitive Bedingungen für den Aufbau des Verständnisses von Zifferndarstellungen

4.6.1 Schreibweise von Ziffern einüben

Gaidoschik (2007) schlägt vor, Kinder beim Lesen- und Schreibenlernen von Ziffern von Anfang an mit allen Ziffern von 0 bis 9 (aus Holz oder anderen Materialien sowie als Ziffernkarten) zu konfrontieren und folgende Impulse zu setzen:

- Sortieren lassen; in die richtige Reihenfolge bringen.
- Welche könnt ihr schon lesen? Habt ihr bei manchen eine Ahnung, was sie bedeuten? Welche kennt ihr gar nicht?

- Schaut genau und überprüft, was einige der Ziffern gemeinsam haben und worin sie sich trotzdem unterscheiden.
- Wie könnte man sie schreiben? Wo fängst du an? Könnte man auch anderswo anfangen?
- Wie geht es für DICH am leichtesten? Wie oft muss man den Stift ansetzen?
- Kann es durch schlampiges Schreiben zu Verwechslungen kommen? Worauf muss man also achten?

Gaidoschiks Einstellung zur Ziffernschreibweise ist sehr liberal. Besonders beim Schreiben mehrstelliger Zahlen und beim „Untereinander-Schreiben" von Zahlen beim schriftlichen Rechnen hat sich jedoch ein normgerechtes Schreiben von Ziffern bewährt. Dadurch wird ein besserer Schreibfluss gewährleistet und Fehler durch Verwechseln ähnlich aussehende Zeichen können reduziert werden. Ein ausgearbeiteter Kurs zur Ziffernschreibweise war deshalb noch 1994 im Bildungsplan für Grundschulen in Baden-Württemberg enthalten. Lehrpersonen waren verpflichtet, im Anfangsunterricht darauf zu achten, dass Schulanfänger sich eine normgerechte Ziffernschreibweise angewöhnen. Bestimmt ist es auch heute noch sinnvoll, wenn Kinder von Anfang an eine ökonomische Schreibweise erlernen und einüben. Ob es allerdings zielführend ist, älteren Schulkindern ihre unorthodoxen „Eigenkreationen" um jeden Preis abzutrainieren, muss sicherlich von Fall zu Fall entschieden werden

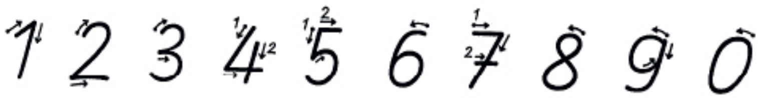


Abb. 19: Schreibrichtung und Bewegungsabläufe der Ziffern. Vgl. Bildungsplan für die Grundschule 1994 (Baden-Württemberg), S. 229.

4.6.2 Vorschläge zur Förderung

Ein **Zahlenalbum**, das die Kinder anlegen, kann die Bedeutung symbolischer Notation aufzeigen.

- Zeichne Dinge, die etwas mit Zahlen zu tun haben;
- Wie weit kannst du schon zählen? Zeichne so viele Kreise, Sterne, … wie du zählen kannst;
- Kannst du schon manche Zahlen schreiben?
- Kennst du Dinge, auf denen Zahlen geschrieben sind?
- „Steckbriefe" zu (An-) Zahlen beschreiben, zeichnen, ausschneiden, usw.

Ziffern schreiben und erkennen lernen mit möglichst vielen Sinnen

- Ziffern aus Sandpapier ausschneiden, aus Pfeifenputzern biegen, kneten, aussägen.
- Ziffern (aus Holz oder ähnlichem Material) auch ohne Blickkontakt ertasten (Fühlsack).

Wir haben nicht wenige Kinder im Anfangsunterricht erlebt, die zwar weite Teile der Zahlwortreihe bis 10 und darüber hinaus bereits sicher aufsagen konnten, aber bei einzelnen Zahlen zwischen 10 und 20 ins Stocken kamen.

Teilweise übersprangen die Kinder dabei konstant immer dasselbe Zahlwort, was in Anlehnung an Fuson als „stabil unkonventionelle Reihe" bezeichnet werden kann.[9] Ein Kind zählt dann beispielsweise konstant unter Auslassung der 15: ... 13, 14, 16, 17, ...

Neben gedächtnisunterstützenden Maßnahmen könnte möglicherweise die Unterstützung des Zählens durch gegliedertes Material und die formal-symbolische Schreibweise für das Kind hilfreich sein. Hierzu werden zusätzlich zu den Zehnerfeldern *Seguinkarten* hergestellt, die den Aufbau zweistelliger Zahlen in einen Zehnerteil und einen Einerteil formal verdeutlichen können (Abb. 20).

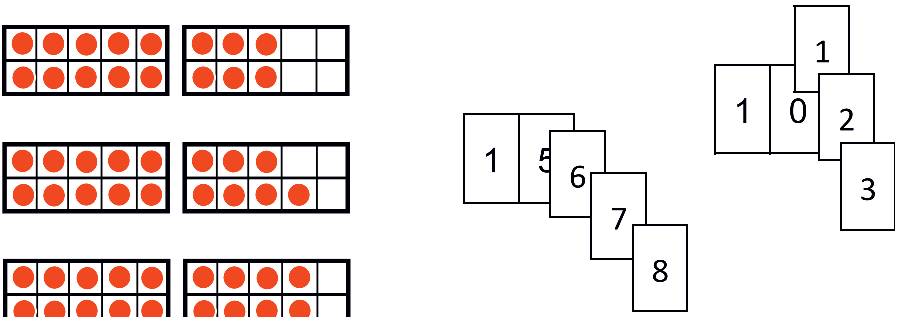


Abb. 20: Zahlenraum 10, 20 und darüber hinaus.

Vorlagen für Seguinkarten in Anlehnung an die Farbgebung von Montessori finden sich zum Herunterladen auf http://mathelandschaft.blogspot.de/ (10.10.2014).

Für den erweiterten Zahlenraum bieten sich schließlich Übungen an, bei denen auf das Hin- und Übersetzen zwischen analoger Zahldarstellung durch strukturiertes Material, Zifferndarstellung anhand von Seguinkarten und Zahlwortdarstellung geachtet wird. Übungsvorschläge hierzu finden sich beispielsweise am Ende von Kapitel 5 in Schäfer (2005).

Dehaene (1992) hat auf der Grundlage von neuropsychologischen Ergebnissen ein Modell zu den Funktionen der Zahlenverarbeitung bei Erwachsenen entwickelt, das „Triple-Code-Modell". Er unterscheidet drei separate Module, in denen Anzahlen in unterschiedlichen Kodierungen repräsentiert werden.

---

[9] Fuson unterscheidet drei Arten, die Zahlwortreihe zu rezitieren: a) stabil konventionell: Die Zahlwortreihe wird grundsätzlich der Konvention gemäß korrekt aufgesagt. b) Stabil unkonventionell: Das Kind sagt die Zahlwortreihe immer gleich auf (stabil), aber in unkonventioneller Reihenfolge, Zahlen werden ausgelassen oder wiederholt. c) Unkonventionell: Das Kind nennt von Mal zu Mal eine andere Folge von Zahlwörtern.

- Im *analogen Modul* (Analog Magnitude Representation) erfolgt die Repräsentation von Zahlen analog und näherungsweise. Dehaene selbst bezeichnet dieses Modul als *„Ausdruck eines angeborenen Zahlensinns“;* es stellt die Grundlage des eigentlichen Zahlverständnisses dar (v. Aster 2005, 14). Das analoge Modul ermöglicht u.a. das simultane Erfassen kleiner Anzahlen („Subitizing“).
- Die Repräsentationsform des *auditiv-sprachlichen Moduls* (Auditory Verbal Word Frame) umfasst auf Inputebene ein Verstehen und Interpretieren geschriebener oder gehörter Zahlwörter sowie auf Outputebene das Bilden von Zahlwörtern, das heißt das Zahlensprechen und -schreiben in Wortform („dreiundachtzig“). Im diesem Modul wird auch die Fähigkeit zum Abruf von Faktenwissen vermutet.
- Im *visuell-arabischen Modul* (Visual Arabic Number Function) ist die visuelle Repräsentationsform von Zifferndarstellungen lokalisiert. Es ermöglicht das Lesen und Schreiben sowie das Interpretieren von Zifferndarstellungen und ist u.a. beim Operieren mit mehrstelligen Zahlen aktiv.

Die Module sind für sich autonom; je nach Aufgabenstellung werden sie jedoch unterschiedlich zusammen aktiviert (vgl. ebd.). Umschriebene Hirnschädigungen führen zu unterschiedlichen Teilausfällen. **Von Interesse für die Entwicklung von frühem Anzahl- und Mengenverständnis ist vermutlich vor allem das Modul zur analogen Repräsentation.**

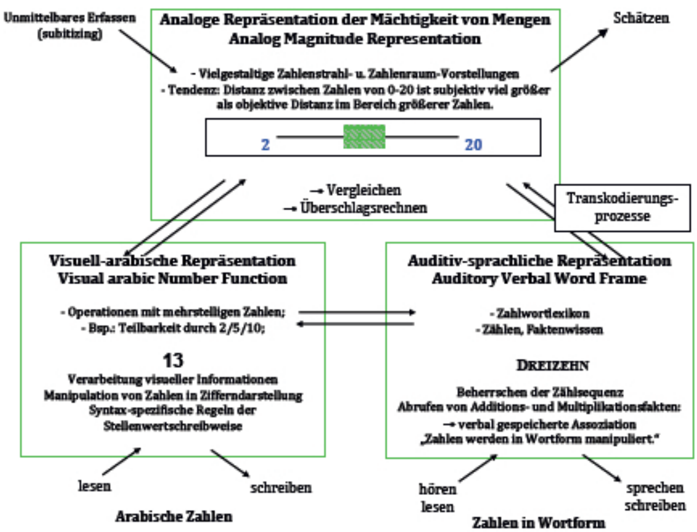


Abb. 21: Triple-Code-Modell in Anlehnung an Dehaene

Die Kenntnis des Konzepts modular gegliederter Zahlverarbeitungseinheiten, wie sie das Triple-Code-Modell Dehaenes nahe legt, ist für den Mathematikunterricht insofern bedeutsam, als sie Hinweise darauf gibt, welche Bereiche beim Erarbeiten von Zahlverständnis in den Bereichen Zahlauffassung und Zahldarstellung besonders berücksichtigt werden sollten. Das Modell zeigt, dass nicht selbstverständlich von entwickelten Fertigkeiten innerhalb *eines* Bereichs (zum Beispiel dem Beherrschen der Zahlwortreihe) auf Kenntnisse in anderen Bereichen geschlossen werden darf (zum Beispiel dem Beherrschen der Ziffernschreibweise) (vgl. Schäfer 2005, 189).

Passende Aufgabenstellungen und Übungen

- Ein Zahlwort oder eine Zifferndarstellung vorgeben, entsprechend viele Objekte zählen. Dabei die Vorteile strukturierten Abzählens erfahren. Gegebenenfalls zunächst nur Einerwürfel bereitstellen, dann über Möglichkeiten diskutieren, diese zu bündeln. Einerwürfel zu Zehnerstangen usw. zusammenfassen/-legen und erst danach zur „Arbeitserleichterung“ fertige Zehnerstangen/Hunderterplatten/Tausenderwürfel einführen.
- Zahlwort und Zifferndarstellung zu einer gegebenen Zahldarstellung mit Material finden;
- Zu einer Zifferndarstellung mit Seguinkarten das entsprechende Zahlwort bilden und die entsprechende Anzahl mit Material legen;
- Ein Zahlwort nennen, die entsprechende Anzahl mit Material darstellen und die Zifferndarstellung mit Seguinkarten legen (und anschließend notieren);
- Wie verändern sich Zahlwort und Zifferndarstellung, wenn Material dazukommt/entfernt wird? (Dito: Wie verändern sich konkrete Darstellung mit Material und Zahlwort, wenn die Zifferndarstellung verändert wird? Wie verändern sich konkrete Darstellung und Zifferndarstellung, bei Veränderung des Zahlworts?)

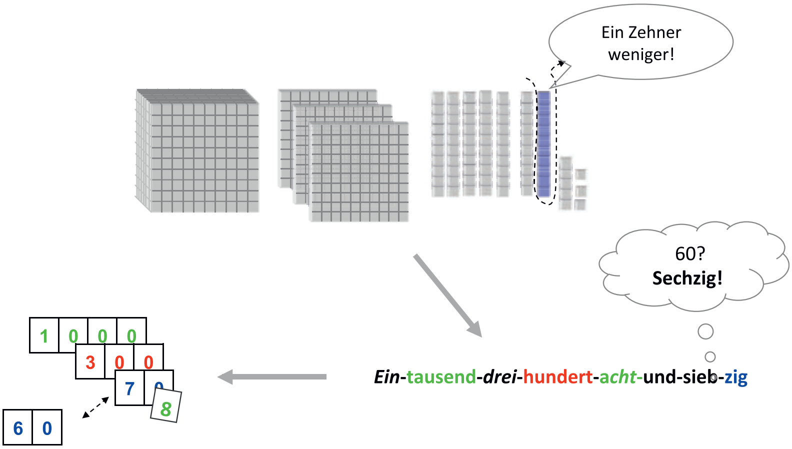


Abb. 22: Fördervorschläge, die aus dem Triple-Code-Modell abgeleitet wurden

Blitzblick-Übungen zur Anzahlerfassung können im fortgeschrittenen Anfangsunterricht und ab dem zweiten Schuljahr auch im erweiterten Zahlenraum eingesetzt werden. Damit kann insbesondere die Entwicklung von Stellenwertverständnis gefördert werden. Dazu werden die Übungen wie oben dargestellt mit größeren Anzahlen durchgeführt. So kann anfangs ein volles Zehnerfeld mit einem nur teilweise gefüllten Feld kombiniert gezeigt werden und die Kinder nennen die dazugehörige Anzahl (10 + 3, also 13). Mit steigendem Schwierigkeitsgrad werden mehrere Zehnerfelder zusammen mit einem nur teilweise gefüllten Feld gezeigt, bis schließlich sogar Hunderter (in Form von Hunderterplatten) und Tausender (als Tausenderwürfel) dazu genommen werden können. Den Kindern kann sich hierdurch erschließen, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind und dass sie – gleichzeitig – Teile von anderen Zahlen sind (Teile-Ganzes-Verständnis). Eine weitere Variation ist, einem Kind jeweils eine vorgefertigte Karte mit einer Zifferndarstellung vorzulegen, die Zahldarstellung mit konkretem Material durch das Kind verdeckt legen zu lassen und anschließend kurz zu zeigen. Die Mitschüler erfassen die dargestellte Anzahl möglichst rasch und nennen sie. Wurde die Anzahl korrekt gelegt, stimmen die Zifferndarstellung und die genannte Anzahl überein.

Gut geeignet für diese Art von Übungen ist das Zehnersystem-Material nach Dienes. Möglich ist, unter einem Tuch eine bestimmte Anzahl aufzubauen, das Tuch kurz anzuheben und die Anzahl danach wieder abzudecken. Eine andere Möglichkeit, diese Übungen zum Beispiel am Overheadprojektor zweidimensional durchzuführen, ist, die Materialien flächig auf Folie zu kopieren und für kurze Zeit an die Wand zu projizieren. Genauso können auch hierfür Karten mit Abbildungen hergestellt werden. Dabei sollte darauf geachtet werden, durchgängig die Fünferuntergliederung zu verwenden, indem zum Beispiel anstelle von fünf Zehnerstangen eine halbierte Hundertertafel verwendet wird. Anstelle von fünf Hunderterfeldern wird ein halbierter Tausenderwürfel (bzw. fünf aufeinander geklebte Hunderterplatten) eingesetzt.

5. Erfassen kleiner Anzahlen

Das schnelle und nicht-zählende Erfassen kleiner Anzahlen (bis 4) „auf einen Blick“ wird „Simultanerfassung“ genannt. Diese Fähigkeit ist entwicklungsbedingt und erst nach der Pubertät im Hinblick auf Schnelligkeit und die Anzahl der fehlerlos erfassten Items voll ausgebildet. Viele Kinder können aber bei Schuleintritt bereits Mengen bis 4 nichtzählend erfassen. Allerdings gibt es auch Kinder, die schon beim Erfassen der Anzahl 2 oder 3 unsicher sind. Auf das Erkennen gerade dieser Kinder muss im Anfangsunterricht besonderer Wert gelegt werden, da die meisten strukturierten Anschauungsmittel, die beim Erstrechnen eingesetzt werden (Zehnerfelder usw.), sich nur dann unterstützend auf das Rechnenlernen auswirken, wenn Kinder die dargestellten Anzahlen wahrnehmen können, ohne die Mengen abzählen zu müssen (vgl. auch Fischer & Schäfer 2002 sowie Schäfer 2005).

5.1 Simultanerfassung

Bei der Simultanerfassung (Subitizing) handelt es sich vermutlich um einen automatisiert ablaufenden, wahrnehmungsbasierten Vorgang. Manche Autoren (vgl. Dornheim 2008) nehmen an, dass dafür sogenannte „object files“ im Kurzzeitgedächtnis gebildet werden. Dies sind interne Repräsentationen (Symbole oder „files“) für jedes einzelne Objekt. Andere Autoren wie Trick und Pylyshin (1993, zit. nach Schäfer 2005, 528) gehen davon aus, dass es sich beim Subitizing um einen präattentiven (vorbewusst ablaufenden) räumlichen Verarbeitungsmechanismus handelt, auf dessen Grundlage bis zu maximal vier Objekte *gleichzeitig* verarbeitet werden können, ohne dass zusätzliche Aufmerksamkeitskapazität notwendig ist: *„a limited capacity preattentive visual process"*. Beim Zählen sei dagegen eine *sequentielle* Verarbeitung des Wahrgenommenen erforderlich.

Kleine Mengen werden vermutlich mittels beider oben beschriebenen Verarbeitungsprozesse beurteilt, dem näherungsweise arbeitenden analogen Mengenrepräsentations-System und parallel dazu mittels des präzise arbeitenden Systems zur Einzelerkennung von Objekten. Wie und wann welcher Mechanismus zum Einsatz kommt, ist noch weitgehend unklar. *„Es wird angenommen, dass der präzise Repräsentationsmechanismus der Ausgangspunkt zur Entwicklung des Zahlen-Wissens ist"* (Dornheim, a.a.O., 50).

Untersuchungen an rechenschwachen und nicht-rechenschwachen Schülern zeigten, dass sich die Fähigkeit zur Simultanerfassung bei beiden Gruppen von Schuleintritt bis zur Pubertät weiter entwickelt. Allerdings fiel auf, dass Kinder und Jugendliche mit sehr schwachen Mathematikleistungen eine signifikant erhöhte Reaktionszeit bei gleichzeitig deutlich geringerer Erkennungsrate hatten (vgl. Fischer & Schäfer 2002, Schäfer 2005).

> Nur wenn unsere Fähigkeit, Mengen spontan zu erfassen, bis vier reicht, können wir uns den Zehner auch ohne Material vorstellen, finden wir uns im Dezimalsystem zurecht. (Weichbrodt 1984, 24).

Die meisten der im Anfangsunterricht eingesetzten didaktischen Arbeitsmittel setzen stillschweigend voraus, dass Kinder kleine Anzahlen bis 4 nichtzählend erfassen können. Kinder mit Problemen beim Erfassen kleiner Anzahlen sind darum möglicherweise doppelt benachteiligt: Sie benötigen zum Erfassen kleiner Anzahlen wesentlich mehr Zeit als ihre Klassenkameraden. Darum weichen sie gezwungenermaßen aus auf das Zählen, das allerdings viel anstrengender und darüber hinaus auch noch deutlich fehleranfälliger ist als die Simultanerfassung, von der viele ihrer Klassenkameraden selbstverständlichen Gebrauch machen.

So müssen manche Kinder bereits die Anzahl vier in zwei Teilmengen zerlegen, wenn sie maximal zwei oder drei Objekte erkennen können. Kinder, die vier nicht simultan erkennen können, müssen, um zehn zu strukturieren, mindestens vier Mengen betrachten, zum Beispiel indem sie 10 entsprechend zerlegen in 3 + 3 + 3 + 1. Gleichzeitig können sie im Unterricht verwendete, strukturierte Darstellungen von Anzahlen, beispielsweise in Zehnerfeldern, nicht gewinnbringend nutzen. So bleiben ihnen – wenn nicht im Unterricht besonderer Wert gelegt wird auf die Entwicklung der Simultanerfassung – Möglichkeiten verwehrt, die es anderen Kindern erleichtern, anhand strukturierter Quantitäten mentale Vorstellungen aufzubauen.

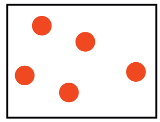
Mentale Zahlvorstellungen dienen Kindern als „Werkzeuge" zur Entwicklung heuristischer Zerlegungs- und Rechenstrategien. Kinder mit eingeschränkter Simultanerfassungsfähigkeit bleiben möglicherweise dauerhaft darauf angewiesen, Aufgaben entweder zählend zu lösen oder Strategien teilweise unverstanden zu übernehmen, weil sie diese ohne ein Verständnis gegliederter Quantitäten, beispielsweise der Fünferstruktur, nicht nachvollziehen können. Diese Kinder laufen überdies Gefahr, ihr einseitiges, ordinal gebundenes Anzahlverständnis nicht in ein von der Zahlwortreihe unabhängiges Anzahlverständnis zu überführen. Auf Grundlage ihrer Zahlvorstellung ist dann lediglich zählendes Rechnen oder ein Auswendiglernen von Basisfakten möglich.

Um bereits im Anfangsunterricht die Entstehung gravierender Schwierigkeiten beim Rechnenlernen vorzubeugen, sollte darum die Bedeutung der nichtzählenden Anzahlauffassung und des numerischen Teile-Ganzes-Verständnisses für die Entwicklung von Zahl- und Operationsverständnis stets im Blick behalten werden.

Für das Erstrechnen ist es besonders wichtig, diese entwicklungsbedingte Fähigkeit gezielt zu fördern und zu trainieren. Sie unterstützt insbesondere den Erwerb von anzahlbezogenen Teile-Ganzes-Vorstellungen sowie den Aufbau von Verständnis für mehrstellige Zahlen auf dem Hintergrund des Teile-Ganzes-Konzepts. Regelmäßige Blitzblickübungen, beispielsweise zu Beginn jeder Mathematikstunde, können hier besonders hilfreich wirken.

5.2 Blitzblickübungen zum Erfassen kleiner Anzahlen

Beim Durchführen von Blitzblick-Übungen zur Anzahlerfassung wird zunächst die Anzahl zugrunde gelegt, die ein Kind eben noch *nichtzählend* erfassen kann. Das bedeutet, dass es bei Kindern, die maximal zwei Elemente nichtzählend erfassen können, nötig ist, bereits die Anzahl 3 als „2 + 1" und die Anzahl 4 als „2 + 2", später als „3 + 1" darzustellen. Dies kann zum Beispiel durch eine farbliche Untergliederung und durch die Anordnung von Items bzw. Objekten geschehen.



In der Vorstellung der Schülerinnen und Schüler können einzelne Objekte oder Objektgruppen umgruppiert oder deren Lage so verändert werden, dass die dargestellte Anzahl leichter zu erfassen ist. So sagte ein 5-jähriges Mädchen beim Betrachten der rechts abgebildeten Aufgabenkarte: *„Da muss ja nur der Punkt da in die Würfelvier reinhüpfen, dann ist es eine Würfelfünf."*

Durch solche Umgruppierungen, die „im Kopf" vorgenommen werden, fördern Blitzblick-Übungen über das Erfassen von Anzahlen hinaus auch das räumliche Vorstellungsvermögen der Schulkinder.

Zum Einstieg in die Übungen zur Anzahlerfassung eignet sich das Arbeiten mit Würfelbildanordnungen. Diese sollten aber zügig durch weitere flächig-räumliche sowie durch lineare (bis 5) Anordnungen ergänzt und erweitert werden. Besonders bewährt haben sich dafür strukturierte Fünfer- und Zehnerfelder, wie sie von Flexer und van de Walle und im deutschsprachigen Raum von Gerster und Schultz (2000) vorgeschlagen werden. Sinnvoll ist, zunächst mit *Fünferfeldern* zu arbeiten und eine sichere Vorstellung von Fünf als Untereinheit der Zehn zu erreichen, bevor Zehnerfelder eingesetzt werden.

So lange Unordnung herrscht, ist das Zählen schwierig

Gallin kritisiert in einem unveröffentlichten Mailwechsel anlässlich einer Wissenschaftlichen Hausarbeit an der Fakultät für Sonderpädagogik (Burkhardt & Mader 2014), dass die in Zehnerfeldern und anderen Materialien angeordneten Plättchen einen Ordnungsprozess vorwegnehmen, der zunächst vom Kind selbst geleistet werden sollte. „Ordnung", so Gallin, stelle sich nicht von selbst ein. Selbst wenn im Unterricht mit Zehnerfeldern hantiert wird, wird den Kindern die besondere Struktur der Zehnerfelder häufig nicht bewusst. Dies zeigt folgende Situation mit förderbedürftigen Zweitklässlern, in der Zehnerfelder aus dem Gedächtnis gezeichnet werden sollten. Die Kinder hatten bereits vor einigen Wochen Zehnerfelder kennengelernt und einmal in der Woche mit ihnen gearbeitet, wenn die Sonderpädagogin anwesend war. Diese bat sie nun, Zehnerfelder aus dem Gedächtnis aufzuzeichnen. Dabei zeigte sich, dass die Kinder zwar die „Kästchenstruktur", nicht aber die Aufteilung in zweimal 5 Felder erfasst hatten. Stattdessen zeichneten sie Gitter mit 12 und mehr Kästchen.

Wichtig ist deshalb, dass die Kinder die Fünfer- bzw. Zehnerstruktur des strukturierten Materials erfassen. Dazu ist es notwendig, die Zehnerfelder mehrmals eingehend zu betrachten und zu besprechen, eventuell auch unter nochmaliger Zuhilfenahme von Eierkartons.

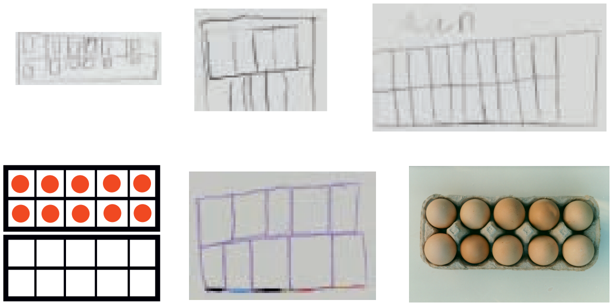


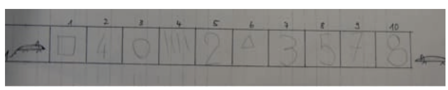
Abb. 23: Freies Zeichnen von Zehnerfeldern (Schülerdokumente)

Zum Kennenlernen des Materials und der Aufgabenstellung werden unterschiedliche Möglichkeiten mit den Kindern besprochen, Anzahlen so zu legen oder darzustellen, dass man sie möglichst rasch *ohne Zählen* erkennen kann.

Außerdem betrachten Kinder Darstellungen und Anordnungen kleiner Anzahlen und tauschen sich darüber aus, wie sie diese möglichst effektiv erfassen können. Ziel ist nicht ausschließlich, besonders rasch die korrekte Anzahl zu nennen, sondern stets darüber zu reflektieren, *wie* die Anzahl erfasst wurde.

Je jünger Kinder sind und je ungewohnter die Übung, desto eher greift die Lehrkraft hier steuernd ein und unterstützt die Verbalisierungen der Kinder. Wichtig ist, dass immer wieder geklärt wird, *wie* die jeweilige Anzahl werden kann: *„Wie hast du das so schnell gesehen?"* und *„Könnte man es auch (noch) anders sehen?"*, sind Beispiele für anregende Fragestellungen. Dadurch, dass Schüler ihre Erkenntnisse verbalisieren und im Klassengespräch miteinander austauschen, erfährt die Lehrkraft, welche Teile, Beziehungen usw. bereits von ihnen erkannt, erfasst und wahrgenommen werden, das heißt bedeutsam geworden sind, und worauf sie in den weiteren Übungen besonderen Wert legen sollte. Durch den sprachlichen Austausch im Unterrichtsgespräch findet ein bewusstes Reflektieren und Bewerten individueller Strategien statt. Wichtig dabei ist, dass Vor- und Nachteile einzelner Strategien gegeneinander abgewogen werden.

Ein solcher Austausch eröffnet gerade auch langsamer arbeitenden Kindern mit beschränktem Handlungsrepertoire die Möglichkeit, von anderen Kindern zu lernen und deren Strategien im angstfreien Raum einmal selbst auszuprobieren.



Die erfasste Anzahl kann

- gerufen werden;
- notiert werden: Die Schüler schreiben oder zeichnen hierzu ihre Lösungen in Protokollbögen ein (siehe Abbildung oben).
- mit Ziffernkärtchen gelegt (gezeigt) werden;
- mit Plättchen o. ä. aus dem Gedächtnis nachgelegt werden;
- mit weiteren Aufgabenstellungen verknüpft werden: Eins, zwei, fünf, zehn, hundert mehr oder weniger; wie viel fehlt bis zur 10/20?; das Doppelte/die Hälfte, Rechengeschichten ausdenken, usw.

Bei einer weiteren Variante üben die Kinder in so genannten „Schnappspielen“ das schnelle Erkennen von Anzahlen oder Zerlegungen. Dazu wird eine Anzahl entweder erwürfelt oder ausgelost. Das Suchen und Finden der Karten kann zeitgebunden, zum Beispiel mit Sand- oder Stoppuhr erfolgen oder es kann so lange gespielt werden, bis keine Karte mit der vereinbarten Anzahl mehr gefunden wird.

In Einzel- oder Partnerarbeit wird jeweils ein Kind allein suchen. Die Anzahl der richtig gefundenen Karten wird dann in einer Tabelle notiert, beim nächsten Mal wieder hervorgeholt und mit den neuen Ergebnissen verglichen. Alternativ kann eine Gruppe von Kindern miteinander spielen. Gewinner ist dann, wer die meisten Karten gefunden hat. Besonders für langsamere Kinder ist es wiederum ausgesprochen hilfreich, vor dem Durchführen solcher Spiele darüber zu reflektieren, wie die Anzahlen *schnell* gesehen werden können (zum Beispiel Sechs als „Doppeldrei“, „Fünf-und-eins“ oder „Vier-und-zwei“).

Weitere Darbietungsmöglichkeiten

- magnetische Wendeplättchen und ein metallenes (Back-) Blech oder eine magnetische Klapptafel (individuell und schnell veränderbar);
- (10er-) Eierschachtel und Plastikeier;
- Eine weitere Möglichkeit ist, mit einem handelsüblichen Locher Anzahlen von Löchern in Papier in Notizzettelgröße zu stanzen. Ein Kind legt einen Notizzettel auf den (angeschalteten) Tageslichtprojektor, so dass die ausgestanzten Löcher an der Wand deutlich als helle Punkte sichtbar sind, ein zweites Kind zieht ihn, sobald der Zettel dort liegt, wieder weg.

Wichtig ist, dass immer gefragt wird:

„Wie hast du das so schnell gesehen?“

„Wer hat es anders gesehen?“ oder

„Könnte man es auch noch anders sehen?“

5.3 Spielideen zum Erfassen kleiner Anzahlen

- Memory: Partnerarbeit, Kleingruppen; Laufmemory (Einzelarbeit)
- Memory mit Photos, Zeichnungen, Punktebildern
- Ebenso: Dominos, Lotto, Bingo, usw.
- Spielbrett herstellen und absteigende oder aufsteigende Reihen legen (Vorlage z. B. aus „Kleines Zahlenbuch“ von Müller & Wittmann).
- **Blinder Passagier** mit unterschiedlichem Material zur Zahlauffassung (Punktedarstellungen, Fünfer- und Zehnerfelder o.ä.; vgl. auch den Abschnitt zum Klassifizieren).
- Weitere Spielideen wurden von Thomas Royar zusammengetragen. Sie können größtenteils problemlos auf Zehnerfelder übertragen werden: www.lehrtheke.de

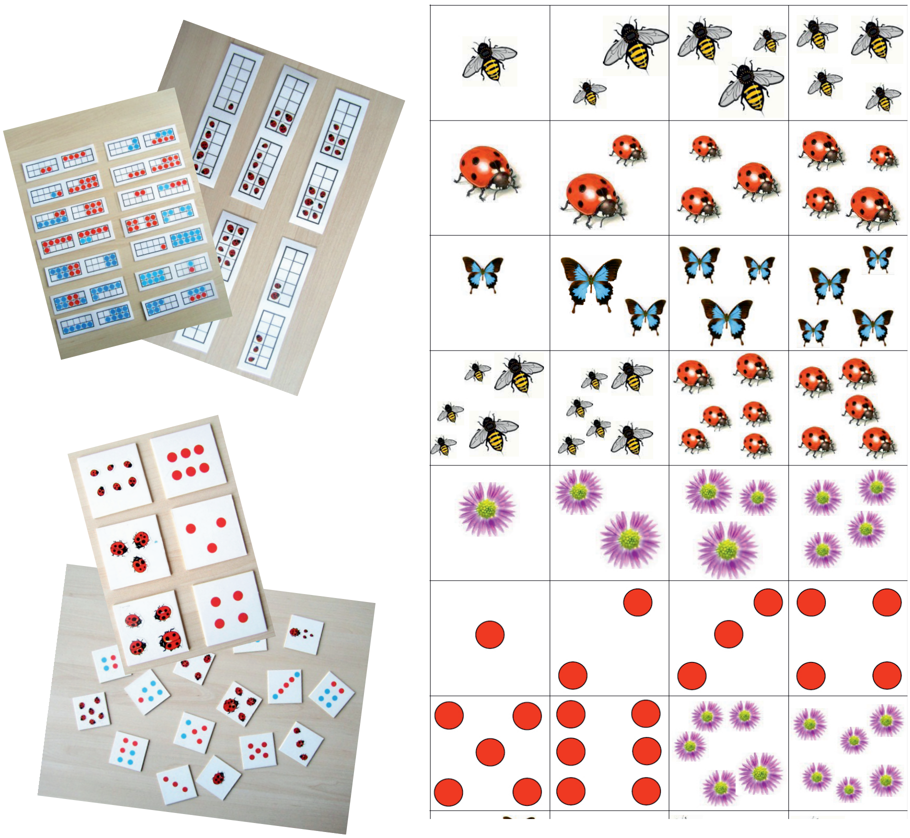


Abb. 24: Material zur Anzahlerfassung

Material: Spielplan, Kärtchen mit strukturierten Mengendarstellungen von Obst.

Spielregeln:

- Kärtchen werden auf einen Stapel in der Mitte gelegt und reihum aufgedeckt.
- Die Obstkarten dürfen auf entsprechenden Feldern des Spielplans abgelegt werden.
- Wer findet schnell einen freien Platz?

Variation 1: Schwieriger wird das Spiel, wenn das gezogene Kärtchen offen abgelegt werden muss. Aufmerksame Mitspieler dürfen klopfen, sobald sie einen freien Platz auf dem Feld entdeckt haben. Hat ein Mitspieler voreilig geklopft, muss er ein weiteres Kärtchen auf die Hand nehmen. Klopft er dagegen richtig, müssen die anderen Spieler, die die Möglichkeit nicht erkannten, ein Kärtchen aufnehmen.

Variation 2: Jeder Mitspieler hat drei bis fünf Obstkarten auf der Hand und entscheidet in jeder Runde, welche Karte abgelegt werden soll. Kann nicht abgelegt werden, muss eine weitere Karte vom Stapel gezogen werden.

Gewinner ist der Spieler, der alle Karten abgelegt hat.

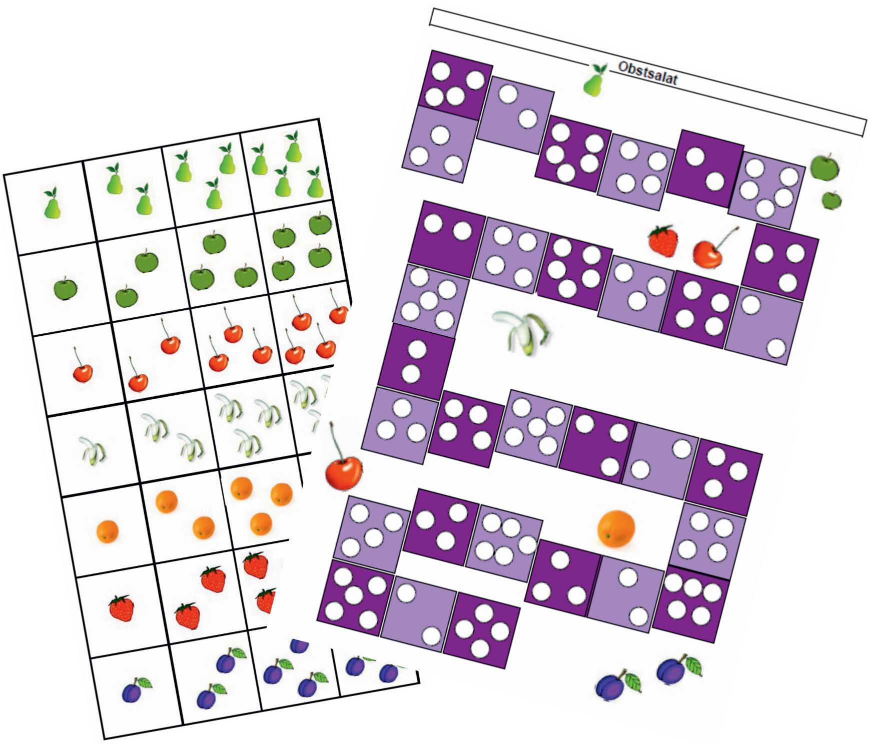


Abb. 25: Vorlagen zum Spiel „Obstsalat“ (erstellt von Studentinnen aus dem Tagespraktikum)

- **Blitzblickjogging:** Die Lehrperson hält eine Blitzblick-Karte hinter ihrem Rücken. Die Schüler rennen schnell hinter ihr vorbei und schauen dabei kurz auf die Karte. Zur Kontrolle können die Schüler dann beim Weiterrennen das Fingerbild der Anzahl zeigen, die sie gesehen haben. Blitzblickjogging eignet sich gut zur Auflockerung oder zum Aufwärmen im Sportunterricht.
- **Blitzblickrennen:** An der Tafel hängen Würfelbilder von 1 bis 6 (später auch Ziffern). Die Lehrperson zeigt eine Blitzblick-Karte. Die Schüler rennen danach schnell zur Tafel und klatschen die Abbildung oder Ziffer ab, deren Anzahl sie gesehen haben.

Materialien und Hilfsmittel für anzahlbezogene Blitzblickübungen

- Walter Feigl, ehemaliger Rektor der Hasenbergschule Stuttgart, vertreibt auf seiner Homepage mathebus.de zum Selbstkostenpreis Photoserien und Materialien wie Mengenbilder zu Früchten (ein Beispiel findet sich in Abb. 18) und Eiern sowie Materialien zum Schriftspracherwerb.
- Kopiervorlagen zu Blitzblickübungen und weiteren Themen findet sich auch unter http://mathelandschaft.blogspot.de/p/material.html.
- Postkarten oder Darstellungen mit kleinen Anzahlen (Tiere, Blumen, Autos, usw.)
- Zehner-Eierkartons, unzerbrechliche Eier, möglichst in rot und blau.
- Ein- und zweifarbige Punktebilder, z. B. in Anlehnung an Würfelbilder
- Fünferfelder
- Zehnerfelder in ihrer Beziehung zur 5 und zur 10
- Zehnerfelder in ihrer Beziehung zu Verdoppelungen
- Japan Tiles (Einer-, Fünfer- und Zehnerstäbe).

6. Risiko: Ordinal gebundenes Anzahlverständnis

Viele Kinder verfügen über eine einfache Form der Kardinalität, indem sie einer gezählten Anzahl das richtige Zahlwort zuordnen können und umgekehrt. Sie scheinen sich aber dabei an einem imaginierten Zahlenstrahl zu orientieren (Gerster & Schultz, 2000). Diese Vor- oder Zwischenform einer voll entwickelten Anzahlvorstellung kann man als *ordinal gebundene Kardinalität* bezeichnen. (Schäfer, 2009). Das bedeutet folgendes: Auf dieser Stufe bedeutet „Vier“ noch keine gedankliche Entität – ein von Zahlwortreihe bzw. von konkreten Objekten losgelöst zu denkender „Vierer“ – sondern ist gebunden an den Abschnitt der Zahlwortreihe, der mit „eins“ beginnt und bei „vier“ endet, oder an vier konkrete Objekte, die – bei 1 beginnend – gezählt werden. Mit diesem einseitigen Anzahlverständnis werden die anhaltenden Schwierigkeiten vieler Kinder beim Rechnen leichter verständlich. Kinder, die unter „3“ den Abschnitt „1-2-3“ der Zahlwortreihe verstehen und unter „4“ den Abschnitt „1-2-3-4“, haben vermutlich Mühe damit, diese Vorstellungen mit „sieben“, das heißt dem Abschnitt „1-2-3-4-5-6-7“ in Verbindung zu bringen (Gerster, 2003). Auf dieser Stufe des Verständnisses wird „7“ nicht als Zusammensetzung aus 4 und 3 erkannt, denn dazu muss der Abschnitt „5-6-7“ als „Dreier“ gedacht werden. Dies steht aber in Widerspruch zur ordinal gebundenen Anzahlvorstellung, bei der jede Zahl mit „1“ beginnt. Für Kinder mit ordinal gebundenem Zahlverständnis ist dieser Schritt ohne zählendes Rechnen kaum leistbar.

Lukas, ein entwicklungsverzögerter Grundschüler mit besonderem Förderbedarf im Fach Mathematik, soll die Anzahl „drei“ mit den Fingern zeigen. Der Junge streckt nacheinander Daumen, Zeige- und Mittelfinger seiner rechten Hand aus. Angesichts seines Fingerbilds wird er gefragt, ob man „drei“ auch anders zeigen könne, zum Beispiel *so:* Hier wird ihm ein Fingerbild gezeigt, auf dem Mittelfinger, Ringfinger und kleiner Finger ausgestreckt sind. Überzeugt verneint Lukas mit den Worten: *„Das geht nicht – die gehören doch zur Fünf!“*

Lukas hat bereits gelernt, Anzahlen zu zählen und er kann kleine Mengen erkennen. Damit meistert er einfache Formen von Zahldarstellung und -auffassung. Beim Rechnen ist er jedoch auf zählende Strategien angewiesen.

Der Junge argumentiert auf der Ebene des präzisen Anzahlkonzepts im Sinne von Krajewski (vgl. 4.1.2). „Drei“ ist für ihn der Abschnitt der Zahlenfolge, der mit „eins“ beginnt und mit „drei“ endet. Seine Zahlvorstellung beginnt mit dem Daumen, der die „eins“ darstellt. Ringfinger und kleiner Finger kommen in seiner „drei“ nicht vor, wohl aber in vier oder fünf. Dieses Verständnis lässt es noch nicht zu, Anzahlen flexibel und unabhängig von einer linearen, stets mit 1 beginnenden, Abfolge zu handhaben.

Hauptschwierigkeit des zählenden Rechnens sind die Kontrollprozesse, die ein doppeltes Zählen erforderlich machen: 4 + 3 wird z. B. folgendermaßen gelöst: *eins* dazu: 5; *zwei* dazu: 6; *drei* dazu: 7. Kinder, die ihre Finger als Zählhilfe nutzen, meistern diese Kontrollprozesse, indem sie eine verbale mit einer motorischen Zählprozedur verknüpfen. Sie beginnen damit, betont „vier“ zu sagen. Anschließend sagen sie „fünf“ und strecken gleichzeitig einen Finger aus *(motorische Zählprozedur)*. Dann sagen sie „sechs“, strecken den 2. Finger usw., bis sie das *Fingerbild* des zweiten Summanden vor Augen haben (hier drei Finger). Nun nennen sie das Ergebnis ihrer *verbalen* Zählprozedur: „sieben“. Der Zusammenhang zwischen motorischer und verbaler Zählprozedur wird jedoch auf dieser Verständnisgrundlage nicht deutlich. Es scheint sogar einen unaufgelösten Widerspruch zu geben zwischen beiden Endzuständen, dem *Hörzeichen* „sieben“ als Ergebnis der verbalen Prozedur und dem *Sehzeichen*, dem Fingerbild „drei“ als Ergebnis der motorischen Prozedur. Diesen Widerspruch erleben zählend rechnende Kinder bei allen Plus- und Minusaufgaben (a +/- n), in denen der zweite Summand bzw. der Subtrahend gleich n ist. Das jeweilige Hörzeichen ist die Summe bzw. Differenz aus a und n, das entsprechende Sehzeichen ist stets gleich, nämlich n.

7. Anzahlbezogenes Teile-Ganzes-Verständnis

Im Lauf des Erstrechnens erweitern die meisten Kinder ihr ordinal gebundenes Zahlverständnis dahingehend, dass sie zusätzlich ihre vorzahligen, mengenbezogenen Teile-Ganzes-Vorstellungen nun auch auf Anzahlen beziehen. Das heißt, sie verstehen, dass auch (An-) Zahlen Teile anderer Anzahlen sind, so wie Mengen Teil anderer Mengen sein können (7 ist ein Teil von 10) und selbst wieder in Teilanzahlen zerlegt werden können (7 ist 5 und 2).

Das konzeptuelle Wissen über Beziehungen zwischen Teilen und Ganzheiten (Teile-Ganzes-Verständnis) kann in seiner essentiellen Bedeutung für die Entwicklung mathematischen Verständnisses nicht hoch genug eingeschätzt werden (Resnick 1983; Gerster & Schultz 2000; van de Walle 2004). Es erschöpft sich bei weitem nicht im Verständnis von „Zahlzerlegungen", sondern hat fundamentale Auswirkungen auf die Entwicklung von Operationsverständnis und trägt noch in der Sekundarstufe maßgeblich zum Verständnis von Zahlen und Operationen in neuen Zahlbereichen bei.

Die protoquantitativen Schemata werden folgendermaßen mit dem Anzahlverständnis in Verbindung gebracht, beziehungsweise um Zahlbeziehungen erweitert.

(1) **Vergleichsschema:** Kinder auf der Stufe eines anzahlbezogenen Teile-Ganzes-Verständnisses wissen, dass Anzahlen unterschiedlich groß sind. Anzahlen lassen sich vergleichen. Die Unterschiede zwischen zwei Zahlen sind selbst wieder Zahlen. Kinder können mengenbezogenen Urteile wie „viel" oder „wenig", „größer" oder „weiter" nun mittels (An-) Zahlen präzisieren.

(2) **Zunahme-Abnahme-Schema:** Kinder wissen, dass eine Anzahl zunimmt, wenn eine andere Zahl hinzugefügt oder weggenommen wird. Sie wissen, dass der Unterschied zwischen Zahlen wieder durch eine Zahl ausgedrückt werden kann. Hier ist insbesondere das Verständnis von „Eins-mehr-" (zwei-mehr, fünf-mehr und zehn-mehr) Beziehungen zu berücksichtigen.

(3) **Teile-Ganzes-Schema:** Kinder wissen, dass man (An-) Zahlen zerlegen und neu zusammensetzen kann. „Acht" zum Beispiel ist sowohl „fünf-und-drei", „vier-und-vier" usw. „Acht" ist aber auch „eins-mehr-als-sieben" oder „zwei-weniger-als-zehn".

Auf der Stufe des Zahlverständnisses im Sinne eines anzahlbezogenen Teile-Ganzes-Verständnisses bauen Kinder ein beziehungsreiches Wissen über Zahlen auf. Sie wissen nun, dass sich an der Anzahl des Ganzen nichts ändert, wenn Elemente innerhalb der Teile verschoben werden (Prinzip der Kompensation). Sie wissen auch, dass das Ganze um 1, 2, ... zu- oder abnimmt, wenn einer der Teile entsprechend vergrößert oder verkleinert wurde (Prinzip der Kovarianz). Dieses Wissen ist zum einsichtsvollen, vorteilhaften und strategiegeleiteten Rechnen erforderlich. Es ermöglicht, komplexe Aufgaben in einfachere zu überführen und dadurch vorteilhaft zu rechnen. „7 + 9" ist zum Beispiel genauso viel wie „6 + 10" (Prinzip der Kompensation), „7 + 6" ist eins mehr als „6 + 6" und eins weniger als „7 + 7" (Prinzip der Kovarianz).

Kinder, die erst anfangen, ihr Mengenwissen und ihr Zahlenwissen zu einem elaborierten Kardinalzahlverständnis zu verknüpfen, sind noch auf konkrete Anschauung angewiesen. Die Fähigkeit, kleine Mengen rasch und nichtzählend zu erfassen und mit Zahlwörtern zu bezeichnen, kann die Erweiterung des ordinalen Zahlverständnisses um seine kardinale (Mengen-) Bedeutung erleichtern und ermöglicht es Kindern auch, mentale Vorstellungen kleiner (An-) Zahlen aufzubauen.

Der Schritt vom pränumerischen zum numerischen Teile-Ganzes-Verständnis scheint nach allem, was wir heute wissen, fundamental für den Erwerb mathematischer Kompetenzen zu sein.

7.1 Anzahlbezogenes Vergleichschema und Zunahme-Abnahme-Schema

Der **sichere Umgang mit Vergleichswörtern** (mehr als, weniger als, gleichviel) ist neben dem verständnisvollen Zählen eine zweite und **unverzichtbare Grundlage** für den Erwerb tragfähiger Zahlkonzepte.

Wenn eine Menge „mehr" (mächtiger) ist als die andere – **um wie viel** ist sie dann mehr? Viele Kinder in der Eingangsstufe können mit dieser Frage noch nicht viel anfangen. Mit diesem Gebiet intensiv auseinander gesetzt haben sich Gerster & Schultz (2000) sowie Gaidoschik (2007).

Die Frage: „*Wie viel ist fünf und eins?*", beantworten viele Schulanfänger spontan. Die Frage *„Wie viel ist eins mehr als fünf?"* macht sie dagegen ratlos – sie wissen nicht, was damit gemeint ist.

Auf der Basis eines **Eins-zu-Eins-Vergleichs** kann man die Frage „um wie viel mehr?" leicht beantworten. Denkt ein Mensch bei der Frage nach *„mehr"* allerdings *keinen* Eins-zu-Eins-Vergleich mit, kann er mit der Frage **„um wie viel mehr?"** vermutlich nur schwer oder gar nicht zurechtkommen.

Es ist ausgesprochen wichtig, dieser Frage im Mathematikunterricht ausreichend Zeit zu widmen. Spätestens beim Sachrechnen werden Kinder konfrontiert mit Aufgaben, bei denen „Eine-" oder „Viele-"mehr-Beziehungen eine zentrale Rolle spielen.

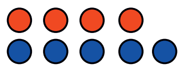
Baroody et al. (2009, 69 und 72f.) beschreiben, dass insbesondere sozial benachteiligte Kinder, die in Multiproblemlagen[10] aufwachsen, bedroht sind, gravierende Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu entwickeln. Beispielsweise fand Baroody heraus, dass drei Fünftel von 133 Erstklässlern aus Multiproblemmilieus bis zur Mitte des ersten Schuljahres maximal 83 Prozent der häufig als vernachlässigbar betrachteten Eins-Mehr-Beziehungen (n + 1 / n - 1) gemeistert hatten. Drei Achtel der Kinder hatten diesen Rückstand auch am Ende des ersten Schuljahrs nicht aufholen können.

Die Autorengruppe um Baroody konzipierte ein Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen (Abb. 26), das die Bedeutung des Anzahlkonzepts für 1, 2 und 3, das bedeutungsvolle Zählen von Objekten und von Eins-mehr-Beziehungen sowie die Einsicht in Teile-Ganzes-Beziehungen für die Vertrautheit mit Basisaufgaben des Addieren und Subtrahierens aufzeigt (Übersetzung durch JS).

Was könnte Kindern in diesem Bereich schwerfallen und warum?

Wo ist mehr? – Überlegungen und Positionen bei Schulkindern

Mehr" ist für viele Kinder da, wo es *„mehr aussieht"*. Dabei handelt es sich um ein in Alltagssituationen bewährtes Denken!



„Gleich viel" als: „Sieht gleich aus"

„Gleich viel" als: Da muss ich zählen, und wenn ich gleich weit komme, ist es „gleich viel".

Beide Varianten sind unzureichend, weil die dem Anzahlvergleich eigentlich zugrunde liegende Eins-zu-Eins-Zuordnung keine Rolle spielt.

---

[10] Baroody denkt hier an Kombinationen aus niedrigem ökonomischen Einkommen, alleinerziehender und/oder sehr junger Elternschaft, geringem Bildungsstatus der Eltern, Zugehörigkeit zu einer Minderheit, körperlicher oder geistiger Behinderung, Substanzmittelabhängigkeit oder psychischer Erkrankung der Eltern.

Anordnungen wie rechts oben zusammen mit der Frage: **„Um wie viel sind die Blauen mehr?"**, führt zur Ratlosigkeit oder zur Antwort „um fünf!"

Das heißt, viele Kinder wissen mit der Frage „um wie viel mehr?" nichts anzufangen und geben zur Antwort, **was** mehr ist.

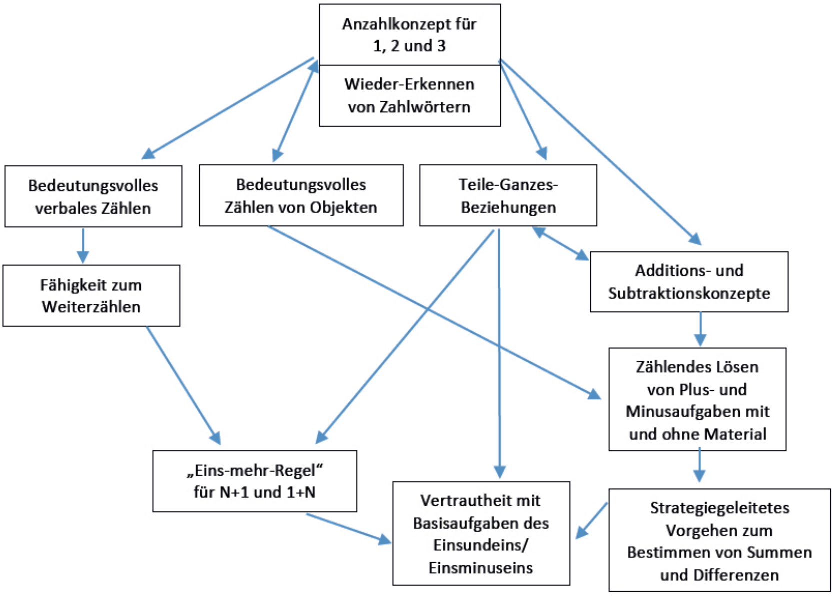


Abb. 26: Entwicklungsmodell mathematischen Verständnisses nach Baroody et al. (2009)

7.1.1 Mengen hinsichtlich ihrer Anzahl vergleichen – Förderung

Zunächst ist es für den Anzahlvergleich wichtig, keine künstlichen Zahlenraumgrenzen zu ziehen! Das Grundsätzliche beim Eins-zu-Eins-Vergleich erschließt sich nämlich leichter, wenn es sowohl bei großen wie auch bei kleinen Anzahlen entdeckt werden kann. Darum auch bewusst den Zahlenraum überschreiten, den Kinder zählend bewältigen: Wer den Eins-zu-Eins-Vergleich verstanden hat, kann auch feststellen, dass 31 Stühle mehr sind als 28 Kinder – auch wenn er erst bis 15 zählen kann (vgl. Gaidoschik 2007).

Anzahlvergleiche in Alltagssituationen anstellen

Im Klassen- oder Förderzimmer gibt es Tische und Stühle. Warum bist du sicher, dass es mehr Stühle sind? Du hast doch gar nicht gezählt!

Im Zimmer sind Tische, Stühle und Kinder. Ein Tisch wird gedeckt. Darauf sind Messer und Gabeln, Teller und Gläser usw. In einem anderen Raum befinden sich Turnbeutel mit je einem Paar Turnschuhe, in den Federmäppchen liegen Stifte, … **Gleich viele?** *Müssen wir zählen, um das herauszufinden? Warum nicht? Wann ist etwas „gleich viel“?*

Anzahlen „mit den Augen vergleichen“

Vergleichsanordnungen vorbereiten, bei denen der Eins-zu-Eins-Vergleich mit den Augen erfolgen kann. Dazu jeweils fragen: *Gleich viel? Wovon sind es mehr? Woran erkennst du das?* Punkteanordnungen wie in Abbildung 25 verlangen, wenn man die Anzahlgleichheit erkennen will, eine in der Vorstellung gedachte räumliche Veränderung. Entsprechende Übungen schulen daher auch das räumliche Vorstellungsvermögen.

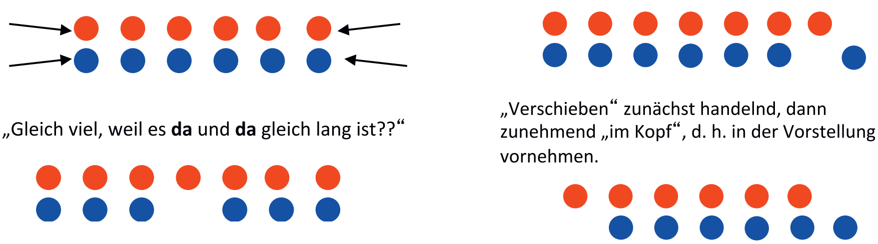
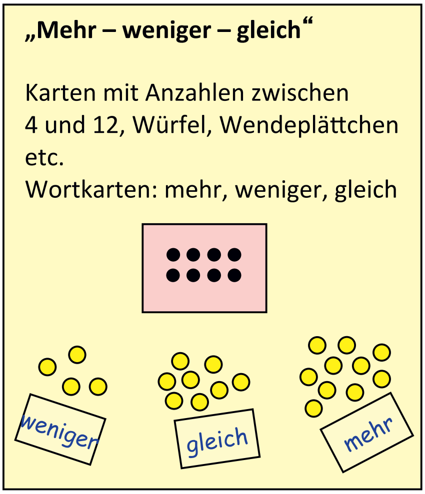


Abb. 27: Anzahlen „mit den Augen“vergleichen“

„Gleichmachen“ ohne zu zählen

Im Klassenzimmer z. B. eine Kiste mit Deckel aufstellen. Jedes Kind (Teddy, Puppe) gibt einen roten und einen weißen Würfel (o. ä.) hinein. Kiste verschließen. Fragen:

- Sind jetzt mehr rote oder mehr weiße Würfel drin? Woher wissen wir das?
- Warum müssen wir nicht zählen, um das herauszufinden?
- Ein Kind nimmt einen (zwei, drei) rote Würfel heraus. Sind es immer noch gleich viele weiße und rote Würfel? Woher wissen wir das jetzt?
- Um wie viel mehr weiße sind jetzt noch in der Kiste?
- Was können wir tun, damit wieder gleich viele rote und weiße Würfel in der Kiste sind, ohne dass wir die roten Würfel zurück legen?



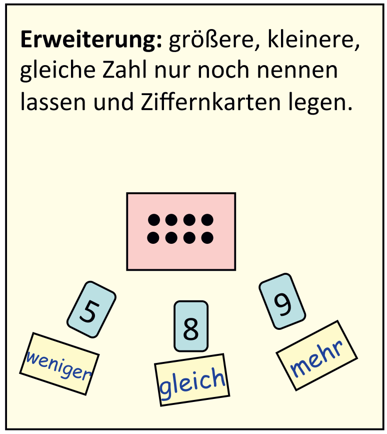


Abb. 28: Übungsvorschläge zum Anzahlvergleich nach van de Walle (2004)

Beobachtungshinweise: Mögliche Strategien, die Kinder einsetzen

(a) gleichzeitiges Zeigen und Legen: Der Zeigefinger einer Hand liegt auf der Punktekarte, die andere Hand legt Würfel.

(b) Durch Zählen,

(c) durch Zuordnen mittels Augenbewegungen: Kind legt für jeden Punkt auf dem Aufgabenkärtchen einen Würfel auf den Tisch – je nach Aufgabe auch einen mehr oder weniger.

Lösen sie die Aufgaben vorwiegend zählend oder zuordnend? Werden kleine Anzahlen bzw. Konfigurationen bereits simultan erkannt? Welche Möglichkeiten gibt es zur Selbstkontrolle?

> Beobachten Sie, wie das Kind vorgeht: Greift es nach dem Zufallsprinzip zu und zählt jeden Punkt oder geht es bereits systematischer vor?

7.1.2 Blitzblickübungen zum Anzahlvergleich

- Zweifarbige Anordnungen wie oben: Um wie viele sind die Roten (die Blauen) mehr (weniger)?
- Zehnerfelder zeigen: Um wie viele sind es oben / unten mehr?
- Nenne immer eins mehr / zwei mehr / fünf mehr / zehn mehr, wie auf der Karte zu sehen sind.

Einen schönen Gesprächsanlass zu diesem Thema bietet das Bilderbuch von Hergane und Pieper „Einer mehr“. Weitere Vorschläge zur Förderung finden sich im Kapitel Operationsverständnis.

Abb. 29: Ein Bilderbuch zum Anzahlvergleich

Weitere Anregungen für die Förderung

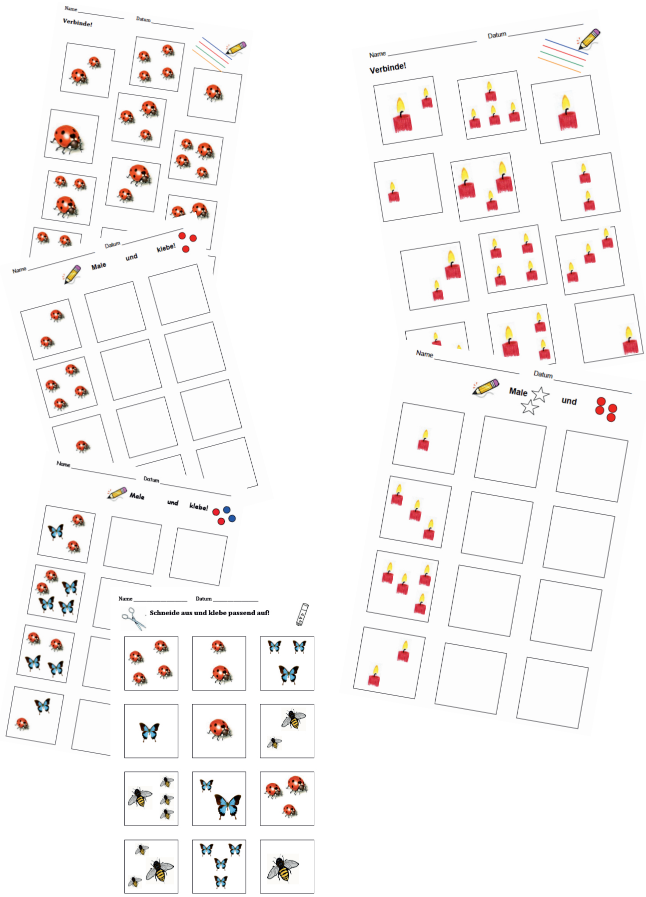


Abb. 30: Anregungen für die Förderung des Anzahlvergleichs

Stechen

Material: Zur Durchführung werden Mengenbilder und/oder kleine Punktekärtchen (0–10 Punkte) benötigt. Jeder Spieler hat einen Stapel davon vor sich liegen.

Es darf immer nur die oberste Karte des Stapels betrachtet werden. Die Spieler klären sich gegenseitig über den Wert ihrer Karte auf. Der Spieler mit der höheren Karte gewinnt und bekommt die Karte seines Gegenspielers. Dieses Spiel kann so lange gespielt werden, bis ein Spieler alle Karten in seinem Stapel hat. Es kann aber auch vorher abgebrochen werden, dann gewinnt der Spieler mit den meisten Karten.

Hamstern

Dieses Spiel wird ausführlich beschrieben und ist für den Einsatz im Unterricht aufbereitet, auch mit Kopiervorlagen der Spielregeln und Spielpläne. Das komplette Material hierzu kann heruntergeladen werden unter http://pikas.dzlm.de/material-pik/themenbezogene-individualisierung/haus-6-unterrichts-material/arithmetikunterricht-in-der-schuleingangsphase-organisation-und-/arithmetikunterricht-in-der-schuleingangsphase-organisation-und-unterrichtsbeispiele.html#Hamstern (10.10.2014).

Material: Einerwürfel oder Wendeplättchen, ein oder zwei Spielwürfel, Unterlage, Spielplan.

Jedes Kind würfelt. Entsprechend der gewürfelten Augenzahl nehmen sie Holzwürfelchen oder Wendeplättchen und legen sie zum Vergleich auf den Spielplan. Nun vergleichen sie, wer mehr Plättchen hat und wie viele mehr/weniger es jeweils sind. Wer die höhere Augenzahl gewürfelt hatte, darf die Differenz behalten.

7.2 Anzahlbezogenes Teile-Ganzes-Verständnis

Kinder, die ihr vormaliges Teile-Ganzes-Verständnis auf Anzahlen übertragen haben, wissen jetzt, dass man nicht nur Mengen, sondern auch (An-) Zahlen zerlegen und neu zusammensetzen kann. „Acht" zum Beispiel ist sowohl „fünf-und-drei", „vier-und-vier", „sechs-und-zwei" usw. „Acht" ist aber auch „eins-mehr-als-sieben" oder „zwei-weniger-als-zehn".

Simultan- und Quasi-Simultanerfassung

Beim Lesen nutzen gute Leser die Fähigkeit zur Gruppierung automatisch. Sie erfassen Wörter nicht buchstabenweise, sondern gliedern sie in Sinneinheiten, in Silben. Ähnlich verfahren Menschen, wenn sie Anzahlen größer als 4 unstrukturiert dargeboten bekommen. Sie gliedern diese „Haufen", indem sie kleine Gruppen von Objekten, die gerade noch überschaubar sind, daraus herauslösen. Das heißt, sie „sehen" bzw. bilden Gruppierungen, die in der Regel noch simultan erfassbar sind und fassen diese anschließend (additiv) zusammen. Diese Fähigkeit wird als **Quasi-Simultanerfassung** oder als **konzeptuelle Simultanerfassung** bezeichnet. Für das Erstrechnen ist es besonders wichtig, diese entwicklungsbedingte Fähigkeit gezielt zu fördern und zu trainieren.

Das Erfassen von Quantitäten, Zahldarstellungen und Zahlzerlegungen hat lange Zeit Vorrang vor Rechenoperationen!

Simultan- und Quasi-Simultanwahrnehmung sind wesentliche Bausteine zum Aufbau von Zahlkonzepten.

- Anzahlen bzw. Quantitäten werden als aus Teilen zusammengesetzte Ganze erfasst (Teile-Ganzes-Konzept). Ein beziehungsreichen Wissen über Zahlen kann so aufgebaut werden.
- Kinder entwickeln ein Verständnis für Veränderungen. Ein Verständnis für Handlungen mit Objekten wird angeregt: Hinzufügen, Vereinigen, Ergänzen, Zerlegen und Wegnehmen werden zunächst real durchgeführt, zunehmend auch in der Vorstellung des Kindes („innere Bilder", „Denkwerkzeuge").
- Beziehungsreiches Wissen über (An-) Zahlen und Verständnis für Veränderungen und Handlungen erleichtern die Entwicklung effizienter, nichtzählender Rechenstrategien und ein Automatisieren von Basisfakten.

Anzahlen größer als 4 sind simultan nicht mehr wahrnehmbar, können aber in *simultan erfassbare Gruppierungen* gegliedert und anschließend rasch zusammengefasst werden (Quasi-Simultanerfassung, konzeptuelle Simultanerfassung). Beispielsweise kann man so die „Sechs" als „Doppeldrei" bzw. als „Vier-und-Zwei", „Fünf-und-Eins" usw. erfassen. Dieser Vorgang fällt umso leichter, je strukturierter die Anzahl dargeboten wird.

Simultanerfassung, Teile-Ganzes-Verständnis und (Muster-)Erkennung unterstützen die Entwicklung der Fähigkeit zur Quasi-Simultanerfassung und umgekehrt

7.2.1 Blitzblickübungen zur Quasi-Simultanerfassung

Blitzblickübungen zur Simultanerfassung haben die Anzahlerfassung bis maximal 5 zum Ziel. Einige Kinder haben bereits Anzahlen größer als 2 oder 3 als strukturierte Darstellungen sehen gelernt. Sie erkennen vier beispielsweise als 2-und-2 oder 3-und-1. Wenn Kinder im Zahlenraum bis 5 sicher in der Anzahlerfassung sind, kann man Blitzblickübungen zu größeren Anzahlen durchführen (Quasi-Simultanerfassung).

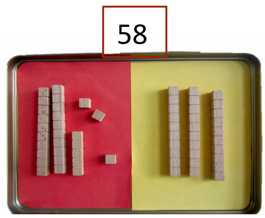
Voraussetzung für Blitzblickübungen zur Quasi-Simultanerfassung, die nach demselben Prinzip durchgeführt werden, ist also, dass Anzahlen von 1 bis 5 von den Kindern mittlerweile sicher erkannt werden. Anzahlen zwischen 6 und 10 lernen die Kinder in ihrer Beziehung zu 5 kennen, (das heißt 6 als „5-und-1", 7 als „5-und-2" usw.) und auch in in ihrer Beziehung zu Verdoppelungen (6 als „3-und-3", 8 als „vier-und-vier" usw.). Benötigtes Material für Übungen zur Quasi-Simultanerfassung sind ein- oder zweifarbige Zehnerfelder in ihrer Beziehung zur 5 (linear angeordnet) oder zu Verdoppelungen (Blockdarstellungen).

Auch hier ist es wieder besonders wichtig, sich nicht zu schnell mit der richtigen Anzahl zufrieden zu geben, sondern nachzufragen: Wie hast du das so schnell gesehen? Wer hat es noch anders gesehen? oder Kann man es noch anders sehen? Es ist wünschenswert, dass Kinder Antworten geben wie: „Ich hab Sechs als 3-und-3 gesehen", das heißt, Ganzes und Teile werden in Beziehung zueinander gesetzt und diese Beziehung wird ausdrücklich verbalisiert.

7.2.2 Spiele und Materialien zur Quasi-Simultanerfassung

Material für das Erarbeiten von Zehnerfeldern ist vor allem die **Eierschachtel mit 10 Eiern.** Wenn man möchte, kann man zusätzlich noch kleine Spielküken verwenden, so dass weitere Teile-Ganzes-Beziehungen veranschaulicht werden können.

Abb. 31: Eierschachteln als Material zum Erarbeiten von Zehnerfeldern



Gerster und Schultz (2000) betrachten **Tablettdarstellungen** als besonders hilfreich, um Teile-Ganzes-Beziehungen zu veranschaulichen. An ihnen können vielfältige Veränderungen durchgeführt werden, die den Zusammenhang der Teile zum Ganzen, aber auch das Prinzip kompensatorischer und kovarianter Veränderungen veranschaulichen.

Eine weitere Möglichkeit zur Veranschaulichung summativer Teile-Ganzes-Beziehungen sind **Schachteln mit Einlegeboden**. Auf den Deckel dieser Schachteln kann die darin enthaltene Anzahl auf ein Stück laminiertes Papier geschrieben werden. Die Beschriftung kann anschließend abgewischt und anschließend eine andere Zahl aufgetragen werden.

Auf dem Boden der Schachtel sowie auf dem Einlegeboden findet sich jeweils ein Teil der Anzahl, dargestellt zum Beispiel mit Zehnerstäben und Einerwürfeln (Zehnersystemmaterial nach Dienes) oder auch mit Geldscheinen und Münzen.

In der neben stehenden Abbildung ist 24 „das Ganze" mit den beiden Teilen 11 und 13.

- **Das Ganze ist bekannt, nicht aber die beiden Teile**: Kinder denken darüber nach, wie die Anzahl im Inneren der Schachtel verteilt sein könnte.
- **Das Ganze sowie einer seiner Teile sind bekannt**: Sichtbar sind die Ziffernform der Gesamtanzahl und der obenauf liegende Einlegeboden mit den darin befindlichen Zehnerstäben und Einerwürfeln. Daraus kann auf den noch unbekannten Teil geschlossen werden.
- **Beide Teile sind bekannt, gesucht wird das Ganze**: Die geöffnete Schachtel mit den sichtbaren beiden Teilen wird präsentiert. Die Ziffterndarstellung der Gesamtanzahl ist nicht sichtbar.

Zahlzerlegungskästen („Schüttelboxen“)

Der Begriff „Schüttelbox“ für ein Material zur Zahlzerlegung, das im Mathematikunterricht eingesetzt wird, ist weit verbreitet. Gibt man ihn als Suchanfrage im Internet ein, erhält man binnen weniger als einer Sekunde mehr als 12000 Angaben. Der Ursprung des Materials, dessen ältere Bezeichnung Zahlzerlegungskasten lautet, lässt sich darum nicht mehr exakt festmachen.

„Schüttelboxen“ bzw. Zahlzerlegungskästen werden in unzähligen Ausführungen und Variationen zum Kauf angeboten. Bei Nestle (1999) findet sich eine detaillierte Bauanleitung (vgl. die Abbildung unten). Aus leeren Streichholzschachteln kann man Schüttelboxen leicht selbst herstellen oder von den Schülern herstellen lassen und mit Perlen oder ähnlichem Material bestücken.

Empfehlenswert sind Schüttelboxen mit 5 oder 10 Perlen, bei denen die Anzahlen simultan bzw. quasisimultan erfasst werden können. Weniger empfehlenswert ist es aus unserer Sicht, alle Anzahlen zu präsentieren, da dies zu Verwirrung führen kann. Haben Kinder jedoch die Zerlegungen von 5 und 10 parat, so haben sie damit ein gutes Rüstzeug zum Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 10 und darüber hinaus.

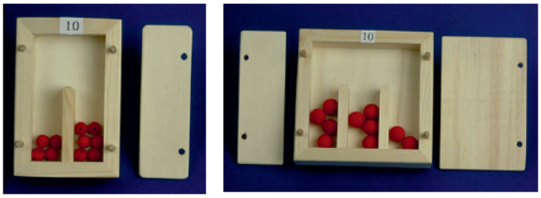


Abb. 32: Zahlzerlegungskasten nach Nestle (1999).

Beim Arbeiten mit Schüttelboxen werden Kugeln oder Perlen durch das Schütteln nach dem Zufallsprinzip verteilt. Wenn zwei Kinder miteinander spielen, schüttelt ein Kind den Kasten, ein anderes nennt die Anzahl der Kugeln, möglichst ohne zu zählen. Weitere Aufgabenstellungen dazu können von den Kindern selbst gefunden werden.

Weitere Aufgabenstellungen und Übungsziele

- simultanes Erfassen kleiner Mengen
- Mengenvergleich (wo sind es mehr?)
- Abzeichnen der Mengen, entweder gleich angeordnet wie im Zahlzerlegungskasten oder Einzeichnen in Zehnerfelder
- Herausfinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, um eine Gesamtanzahl in zwei oder drei Teilmengen zu zerlegen. Zeichnerisch oder numerisch protokollieren.
- Einen Teil des Zahlzerlegungskastens abdecken oder die Schüttelbox nur zur Hälfte öffnen. Es ist nur ein Teil des Ganzen sichtbar. Der andere Teil kann durch Ergänzen zum Ganzen oder durch Subtrahieren vom Ganzen errechnet werden. Die Aufgabe heißt entweder 10 = 7 + __ oder 10 - 7 = __. Durch Öffnen der Schachtel kann das Kind seine Lösung selbst überprüfen.

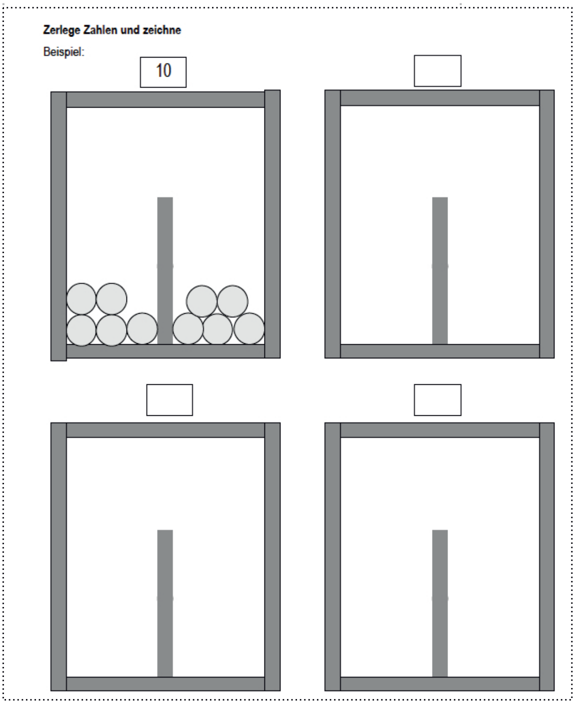


Abb. 33: Beispiel für eine Arbeitsvorlage aus Nestle (1999, S. 56).

Hinweise zum Einsatz von Schüttelboxen finden sich neben Angaben in Nestle (a.a.O.) unter anderem im Lehrerband zu den „Matheprofis“ von Haller und Schütte. Mittlerweile gibt es auch Lernapps, die das Arbeiten mit Schüttelboxen simulieren (www.lernsoftware-mathematik.de).

Plättchen werfen

Hintergrund dieser Übungsform, die Wittmann und Müller (1993, 30) beschreiben, ist ein einfaches Zufallsexperiment. Fünf (alternativ zehn) Wendeplättchen werden in einen Würfelbecher gegeben, geschüttelt und auf die Tischfläche gekippt. Wie viele Plättchen liegen mit der blauen Seite nach oben, wie viele mit der roten Seite?

Material: Wendeplättchen oder Centmünzen, Würfelbecher

Zielsetzung: Geübt wird das Bestimmen von Anzahlen, Anfertigen von Strichlisten, Zahlzerlegungen.

Vorgehensweise

- 5 oder 10 Wendeplättchen werden in einem Würfelbecher geschüttelt und auf den Tisch oder eine Unterlage geworfen Kind stellt fest, wie viele mit rot und blau nach oben liegen. Zur Einführung wird die Übung zuerst vorne an der Tafel mit großen Wendeplättchen durchgeführt.
- Passende Zehnerfelder dazu heraussuchen oder Anordnung mit Wendeplättchen ins Zehnerfeld legen.
- Alle Kinder führen das Experiment durch. Die Ergebnisse werden notiert und reihum genannt.

- Welche Ergebnisse können überhaupt vorkommen?
- Dazu an der Tafel eine Tabelle erarbeiten, in der die Würfelergebnisse in Strichlisten festhalten werden. Untenstehende Abbildung verdeutlicht, wie diese Tabelle gestaltet werden kann.
- Tabelle stehen lassen, am nächsten Tag nochmals aufgreifen. Jedes Kind führt das Experiment einige Minuten lang eigenständig durch und notiert die Ergebnisse auf einem Arbeitsblatt. Es folgt ein Klassengespräch: Welche Ergebnisse treten am häufigsten auf? Welche fast nie? Erklärung?

Plättchen werfen

Plättchen		Strichliste
10 rote	0 blaue	
9 rote	1 blaues	
8 rote	2 blaue	
7 rote	3 blaue	
6 rote	4 blaue	
5 rote	5 blaue	
4 rote	6 blaue	
3 rote	7 blaue	
2 rote	8 blaue	
1 rotes	9 blaue	
0 rote	10 blaue	

Abb. 34: Plättchen werfen

Schnappspiel zum Teile-Ganzes-Verständnis

Statt nach Anzahlen zu suchen, wird jetzt nach Zerlegungen gesucht: Wer findet Karten, die zu 3 und 4 passen? Zu 5 und 2? Es muss begründet werden, wo die jeweiligen Teil-Anzahlen zu sehen sind. Das Ganze (das heißt die Summe der Teile) wird abschließend ebenfalls genannt.

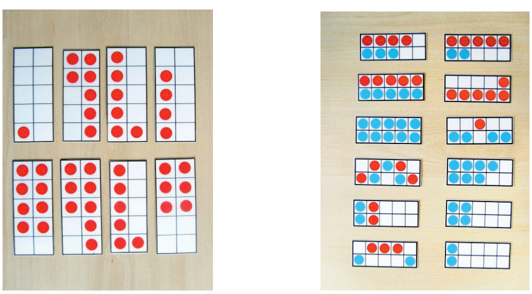


Abb. 35: Kleine Zehnerfelder als Vorlage für Spiele zur Anzahlerfassung

Ein Tipp aus der Schulpraxis

Ein Tennisball wird so eingeschnitten, dass es aussieht, als hätte er einen Mund. Man kann zusätzlich Augen und eine Nase aufmalen oder aufkleben. Zusammen mit den Kindern kann der Tennisball schließlich noch personifiziert werden, indem er einen Namen bekommt und ihm bestimmte Eigenschaften zugeschrieben werden.

Dieses Material wirkt auf manche Schüler sehr motivierend. Eingesetzt werden kann es für Übungen zur Zahlzerlegung. Nachteilig ist, dass man die „gefressenen" Teile nicht mehr sehen kann und so keine visuelle Stütze hat.

Material: Ein Tennisball, Murmeln, kleine Gegenstände

Anregungen: Übungen zur Zahlzerlegung

Der Tennisball „frisst" Murmeln und spuckt sie wieder aus. Je nach Blickwinkel kann das „Fressen" als Zahlzerlegung, Subtraktion oder Addition gedeutet werden.

Beispiele

- Wir haben sechs Steine. Der Tennisball frisst vier davon auf. Wie viele sind dann noch übrig?
- Der Tennisball hat drei Kugeln gefressen. Jetzt frisst er noch zwei Kugeln. Wie viele hat er dann insgesamt gefressen?
- Der Tennisball hat sieben Kugeln gefressen. Er spuckt zwei Kugeln wieder aus. Wie viele hat er dann noch im Bauch?

7 auf einen Blick (Klett-Verlag, Preis ca. 14,95 €)

Halli-Galli

Variation: Die Glocke darf bei 2 (3, 4, […] 6) gleichen Gegenständen angeschlagen werden, die Anzahl wird erwürfelt.

Nachbarzahlen-Halli-Galli

Material: Kartensatz mit Ziffern, Halli-Galli-Kllngel

Jedes Kind hat vor sich einen Stapel mit Ziffernkarten liegen.

Variante 1: Eine Zahl wird aus dem Stapel gezogen oder auf eine andere Art vorgegeben, zum Beispiel ausgewürfelt. Gesucht werden die Nachbarzahlen. Das Kind, das selbst eine Nachbarzahl aufdeckt oder in einem anderen aufgedeckten Stapel entdeckt, darf die Klingel drücken. Natürlich soll es auch die Nachbarn benennen: den aufgedeckten und auch den zweiten Nachbarn. Gelingt ihm dies, bekommt es die oberste Karte jedes Stapels. Gewonnen hat, wer am meisten Karten hat.

Variante 2: Es wird keine Zahl wird mehr vorgegeben. Immer dann, wenn zwei benachbarte Zahlen aufgedeckt wurden, kann geklingelt werden. Das Kind, das richtig geklingelt hat und die beiden Nachbarn nennen kann, bekommt die bereits abgelegten Karten. Wer keine Karten mehr hat, scheidet aus.

Speed (Kartenspiel von R. Staupe, Preis ca. 7 €)

Produktbeschreibung des Herstellers: Zwei Spieler versuchen, so schnell wie möglich und wild durcheinander alle ihre Karten loszuwerden. Einzige Regel hierbei: Beim Legen der Karten muss immer mindestens ein Merkmal übereinstimmen. Hiervon gibt es drei, auf die man sich gleichzeitig konzentrieren muss, und das ist gar nicht so einfach. Wer ist der Schnellste?

Flinke Flosse (Ravensburger, ca. 17 €)

Produktbeschreibung des Herstellers: Alle zählen gleichzeitig die Fische auf den sechs Würfeln.

Wer klatscht blitzschnell auf die Karte mit der richtigen Anzahl?

Jetzt wird es spannend: Denn nur mit einem Netz ohne Loch gewinnt man Glitzerfische!

Christian Urff, promovierter Sonderschullehrer und Informatiker, unterhält eine hervorragende Website mit Informationen und Downloadmöglichkeiten rund um das Zehnerfeld und andere Themen zum Erstrechnen. Unter anderem hat er eine Software zu Fingerzahlen und ein Programm „Rechnen mit Wendi“ entwickelt, das auf dem Zwanzigerfeld beruht. Seine Materialien eignen sich für den Unterricht, aber auch für die häusliche Förderung. Kostenlos zum Herunterladen bietet Urff außerdem eine von ihm entwickelte Grundschrift für das Erstellen von Unterrichtsmaterialen an. Infos über: www.lernsoftware-mathematik.de

8. Ausblick: Blitzblick und Operationsverständnis

Nach Gerster und Schultz bedeutet Operationsverständnis in den Grundrechenarten die Fähigkeit, Verbindungen herzustellen zwischen

(1) konkreten Problemstellungen, meist in verbaler oder bildlich-verbaler Form,

(2) quantitativen mathematische Modellierungen,

(3) mathematischen Symbolisierungen.[11]

Die Autoren weisen darauf hin, dass jede Darstellungsform eine eigene „Sprache“ darstellt: die Sprache der mathematischen Zeichen, der konkreten Handlung und der modell- oder bildhaften Darstellung. Alle Rechenaufgaben in den Grundrechenarten, ob zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren oder Dividieren, können demnach in drei verschiedenen „Sprachen" dargestellt werden: Als möglichst alltagsnahe konkrete Sachsituation, bild- oder modellhafte Darstellung oder als abstrakt-symbolische Darstellung mittels mathematischer Ziffern und Zeichen. Dabei heben die Autoren hervor, dass „Handeln“ auf jeder Ebene stattfindet, ob mittels (verbaler) Sprachzeichen, Gegenständen, (Schrift-)Zeichen oder Symbolen.

Ein gut entwickeltes *Operationsverständnis* zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen Sprachen hin- und herübersetzen zu können. Dabei sind sechs verschiedene Übersetzungsrichtungen möglich. Für den Mathematikunterricht bedeutsam daran ist: Erst wenn Kinder flexibel von einer in die andere Sprache wechseln können und sie jeweils mit dem eigenen Weltbild, ihren subjektiven Bedürfnissen und Er-

[11] In der fachdidaktischen Literatur finden sich weitere Definitionen von Operationsverständnis, zum Beispiel von Wessolowski und Kaufmann oder Lesh. Auf diese wird in dieser Handreichung jedoch nicht eingegangen.

fahrungen in Einklang bringen können, das heißt ihr eine Be-Deutung zuweisen, haben sie das der jeweiligen Operation zugrunde liegende Konzept, das heißt ihre Struktur, erfasst. Erst *dann* sind sie in der Lage, *sichere* Rechenfertigkeiten zu entwickeln.

Für ein sicheres Verständnis der Grundrechenarten ist es erforderlich, Beziehungen der Standardoperationen zueinander zu erkennen. Addieren und Subtrahieren wie auch Multiplizieren und Dividieren stehen als Operation und Umkehroperation in enger Beziehung. Zu jeder Additionsaufgabe gibt es zwei mögliche Subtraktionen: 7 + 6 = 13, daraus folgt: 13 – 6 = 7 und 13 – 7 = 6. Damit ist aber nur *ein* Aspekt des Subtrahierens ausgedrückt, nämlich der des *Verminderns* oder *Wegnehmens*. Nimmt man weitere Aspekte, wie beispielsweise das *Ergänzen* hinzu (7 + __ = 13), so ergeben sich zu jeder Grundaufgabe insgesamt 12 Aufgaben.

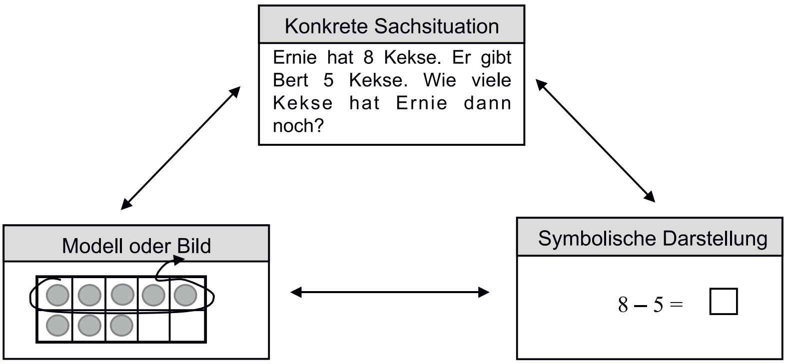


Abb. 36: Repräsentationen einer Subtraktionsaufgabe (nach Gerster & Schultz, 2000, 352)

Auf Grundlage des Teile-Ganzes-Konzeptes werden die Grundrechenarten folgendermaßen gedeutet: *Addieren* bedeutet ein Zusammenfügen von (mindestens zwei) Teilen zu einem Ganzen (der Summe). *Subtrahieren* heißt, dass das Ganze (der Minuend) und (mindestens) eines seiner Teile bekannt sind. Gesucht ist der unbekannte Teil (die Differenz). Beim *Multiplizieren* wird das Ganze (das Produkt) aus mehreren gleich großen Teilen (den Multiplikanden) zusammengesetzt, während das Ganze (der Dividend) beim *Dividieren* bereits bekannt ist und in Abhängigkeit vom Divisor in gleich große Teile geteilt wird. Gesucht wird – entsprechend der beiden Grundvorstellungen des Dividierens – entweder die Anzahl der Teile, was dem Konzept des Aufteilens entspricht, oder aber ihre Größe; dies entspricht dem Konzept des Verteilens (Van de Walle 2004, S. 137 u. S. 143; Gerster & Schultz 2000, S. 396-398).

Baireuther (1999, 52f.) spricht in diesem Zusammenhang von mathematischen *Grundvorstellungen*, die sich herausbilden, *„wenn* **wesentliche Lernerfahrungen** *in allen drei Repräsentationsformen* **zusammenpassen**. “ (Hervorh. im Original). Häufig werde jedoch eine „Stufung“ in Handlung – Anschauung – Verständnis (auch als E-I-S-Prinzip bekannt) als *zeitliche Reihenfolge* beim Bearbeiten eines Themas und als eine Beschreibung des erreichten Lernniveaus missverstanden. (Mathematik-) Unterricht hat jedoch *nicht* die Aufgabe, Schüler von konkreten und anschaulichen Erfahrungen *wegzuführen*, sondern verschiedene Formen der Erkenntnis miteinander zu *verbinden*. In jedem Repräsentationsmodus sind mathematische Erfahrungen möglich, die in anderen Darstellungsarten nicht in entsprechender Weise gemacht werden können.

8.1 Operationsverständnis aufbauen

Ausgehend von konkreten Problemstellungen oder Sachsituationen formulieren Schulkinder im Mathematikunterricht „Zahlensätze“, in denen ihre Handlungen zeichenhaft abgebildet werden. Die „Sprache des Materials“ und die „Sprache der Handlung“ werden dadurch in die abstrakt-symbolische „Sprache der mathematischen Zeichen“ übersetzt oder verschlüsselt (chiffriert). Ziffern und Rechenzeichen werden so zu *Bedeutungsträgern*, die ihrerseits (rück-) übersetzt werden können. Zahlensätze bzw. Gleichungen können somit als protokollartige Aufzeichnungen zu vorgestellten oder real ausgeführten Handlungen verstanden werden. *Operationsverständnis* bedeutet demnach, Zusammenhänge zwischen den Darstellungsebenen zu erkennen oder herzustellen und verschiedene Darstellungen ineinander zu überführen.

Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen fehlt häufig ein ausreichendes Verständnis der Grundrechenarten im Sinne des Teile-Ganzes-Verständnisses. Noch in höheren Schuljahren fehlt diesen Kindern und Jugendlichen vor allem ein Verständnis des Multiplizierens und Dividierens, aber auch beim Addieren und Subtrahieren können – besonders im erweiterten Zahlenraum und in Sachkontexten – Verständnislücken auftreten.

8.2 Formal-symbolische Notationen verstehen lernen

Das Verstehen formal-symbolischer Notationen (Ziffern, Rechnungen, Terme und Gleichungen) erfordert von Kindern ein hohes Maß an Symbolisierungs- und Abstraktionsfähigkeit. Manchen Kindern bereitet es Mühe, zu begreifen, was denn Zahlen, Zeichen oder Punktedarstellungen mit der zuvor erzählten konkreten Sachsituation zu tun haben. Elfriede Jakob, langjährige Sonderschullehrerin, schlägt hier vor, den Übergang von der konkreten Sachsituation zur halbabstrakten Modellsituation und der formalen Gleichungsschreibweise sensibel zu moderieren.

Unterrichtsgegenstand ist beispielsweise ein Gespräch über Erlebnisse auf dem Jahrmarkt. Thematisiert wurden Bündel mit 5, 7, 4, 8 Luftballons. Die Luftballons sollen nun durch Wendeplättchen im Zehnerfeld symbolisiert werden. Ein anderes Mal werden vielleicht Marienkäfer Gegenstand mathematischer Überlegungen sein.

Jakob schlägt vor, den Abstraktionsschritt Ballons – Wendeplättchen, ausgehend von wirklichen Luftballons, folgendermaßen zu begleiten.

Ausgangsmaterial: Realsituationen und -gegenstände, wo möglich

1. Abstraktionsschritt: Rollenspiel mit und ohne Requisiten, Film, Photographie
2. Abstraktionsschritt: Bildergeschichte, Zeichnung
3. Abstraktionsschritt: Erzählung und Symbolisierung durch Wendeplättchen mit Attributen
4. Schritt: Symbolisierung durch Wendeplättchen ohne Attribute
5. Symbolisierung durch formale Schreibweise.

Diese Schritte entsprechen Übersetzungen von der konkreten „echten“ Welt hin zu semiabstrakten, modellhaften Darstellungen. Das Kind soll sich vorstellen, ein Plättchen steht für einen Luftballon, einen Käfer, ein Kind, ein Auto usw. Dieses Verständnis bereitet den nächsten Übersetzungsschritt vor: von der semiabstrakten Modellebene zur abstrakt-symbolischen Ebene der Ziffern und Zeichen.

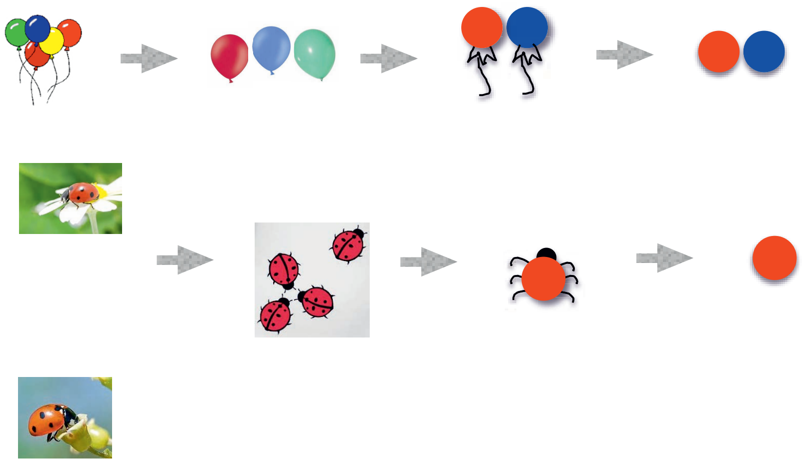


Abb. 367 Vom Konkreten zum Abstrakten

Als hilfreich hat es sich auch erwiesen, wenn Kinder Zuordnungen herstellen zwischen Bildern (mit gegenständlichen Motiven; Personen oder Tieren) und Punktedarstellungen.

Wichtig ist eine Rückversicherung auf jeder Ebene: Versteht das Kind noch den Zusammenhang zur Realsituation bzw. zu den Realgegenständen? Kann es Zusammenhänge zwischen dieser und den Symbolen (Plättchen, Ziffern und Zeichen) aufzeigen?

Ein Verständnis für die Grundrechenarten ist weder angeboren noch darf es bei Kindern aufgrund ihrer alltäglichen außerschulischen (Vor-)Erfahrungen als „selbstverständlich“ vorausgesetzt werden. Darauf wies Kühnel bereits zu Beginn des letzten Jahrhunderts hin (Kühnel 1966, S. 54ff.). Er forderte eindringlich, dass auf die Entwicklung von *Operationsverständnis* im Mathematikunterricht ebenso großer Wert gelegt werden muss wie auf die Entwicklung von *Zahl- und Stellenwertverständnis.*

8.3 Blitzblickübungen zum Aufbau von Operationsverständnis

Blitzblick-Übungen lassen sich nicht nur zum Üben des schnellen Erfassens von Anzahlen einsetzen, sondern auch zum Entwickeln von Verständnis der Grundrechenarten (Operationsverständnis). Dazu werden die Aufgabenkarten wiederum betrachtet. Nach dem korrekten Nennen der Anzahl und der entsprechenden Zerlegung wird gefragt, welche Rechengeschichte gerade zu dieser Karte passen könnte. Die Lehrkraft kann hierbei entweder selbst zwei bis vier Rechengeschichten – auch in Form von Sachbildern – vorgeben und die Kinder entscheiden lassen, welche Gechichte(n) zur jeweiligen Anordnung passen oder sie kann die Kinder eigene passende Geschichten erfinden lassen. Die Kinder können die Geschichten erzählen, zeichnen oder aufschreiben. Vorgaben der Lehrkraft können auf den Ort oder die Personen der Geschichte bezogen sein (Spielplatz, Einkaufen, Ferien, Familie, Haustiere usw.). Weitere Bedingungen können sein, dass die Geschichten zum Beispiel lustig/traurig, realitätsnah/-fern sind.

> „Die Einsicht, dass ein Ergebnis richtig ist, das Verständnis der Logik des Verfahrens, mit dem es erzielt wurde, gibt den Schülern das Gefühl, dass sie tatsächlich eine Fähigkeit und ein Können besitzen - und das schafft viel mehr Zuversicht und Leistungswillen als alle externe Verstärkung." (von Glasersfeld 1998, S. 291).

Erfinden von Rechengeschichten

Der Aufbau von Operationsverständnis kann unter anderem durch das Erfinden von Rechengeschichten zu Zahlensätzen gefördert werden. Dieser Vorschlag ist nicht neu. Die Schweizer Didaktiker Ruf und Gallin beschreiben in ihrem Lehrwerk passende und motivierende Aufgabenstellungen, die sich für den Anfangsunterricht eignen, aber leicht modifiziert auch in höheren Klassenstufen eingesetzt werden können (Ruf und Gallin 1995, 54) .

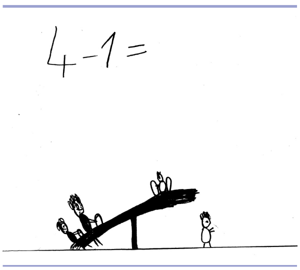
- „Erzähle eine lustige und eine traurige Eins-weniger-Geschichte.
- Es gibt auch Zwei-weniger-Geschichten oder sogar Drei-weniger-Geschichten.
- Und es gibt natürlich auch Eins-mehr-Geschichten oder Viel-mehr-Geschichten. Hast du eine Idee?" (Ruf und Gallin: Sprache und Mathematik 1.–3. Schuljahr, S. 56 f.).

Folgende **Variationen der „Eins-weniger-Geschichten"** sind denkbar, die jeweils einen anderen Aspekt des Addierens/Subtrahierens aufgreifen und mit entsprechenden Blitzblickübungen gekoppelt werden können.

- **Aspekt des Ergänzens:** Erzähle eine „Eins fehlt" oder eine „Eins-zu-wenig"-Geschichte (ebenso mit 2, 5, 10, usw.);
- **Aspekt des Hinzufügens:** Erzähle eine „Noch-eins"-Geschichte oder eine „Eins-dazu"-Geschichte;
- Aspekt des **Vergleichens:**
  - … eine „Eins-zu-viel"-Geschichte;
  - … eine „eins-weniger-als"-Geschichte; usw.

- … eine „Eins-bleibt-übrig“-Geschichte;

- **Aspekt des Vereinigens zweier Mengen:** … eine „zusammen-10“- „das-Doppelte“-, „die-Hälfte“-Geschichte…



Gezeichnete, erzählte oder aufgeschriebene Rechengeschichten können Auskunft geben über Lern- und Entwicklungsstand von Kindern. So kann man dem Bild links eine Vielzahl von Informationen entnehmen: Hier wird bereits die 4 in 2 und 2 zerlegt. Dieses Kind hat also eine Teile-Ganzes-Vorstellung der Anzahl 4. Offenbar weiß es auch bereits intuitiv, dass zwei Kinder schwerer sind als ein Kind, das heißt es hat ein beachtliches physikalisches Verständnis und möglicherweise einen gut entwickelten Sinn für Relationen. Das Bild zeigt ein Verständnis für „Eins-Weniger“, das dem Vermindern einer Ausgangsmenge entspricht.

8.4 Rechengeschichten zu Bildern erfinden

Material: Postkarten mit Tieren, Fahrzeugen oder ähnlichem mit für Kinder interessantem Inhalt

Im Unterrichtsgespräch die Übersetzungsrichtungen beachten. Klären, was die Geschichte mit der Rechnung zu tun hat: Wo steckt „4“ im Bild? Welches Rechenzeichen passt zur Geschichte? Was müsste sich im Bild ändern, damit es zur Geschichte passt? Welche beiden Bären stehen auf? Welche bleiben sitzen? Sieht man das noch in der Rechnung? Warum nicht? ...

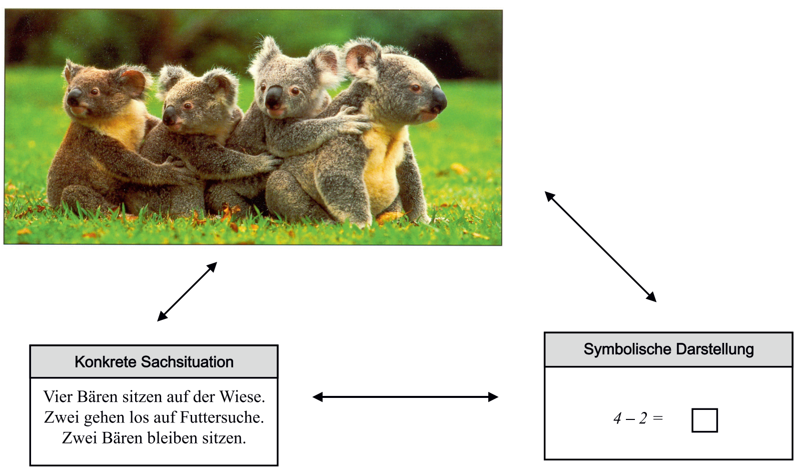


Abb. 38: Rechengeschichten zu Bildern erfinden

9. Logik, Konzentration und Aufmerksamkeit

In diesem Kapitel werden Anregungen zur Förderung von Logik, Konzentration und Aufmerksamkeit sowie zur Schulung des Gedächtnisses anhand der „Logischen Blöcke" nach Z. P. Dienes gegeben. Grund hierfür ist unter anderem, dass es sich bei den „Logischen Blöcken" um ein didaktisches Material handelt, das an vielen Schulen nach wie vor zum Materialbestand gehört, dessen Verwendung aber heutzutage vielfach in Vergessenheit geraten ist.[12]

Das Material „Logische Blöcke" wurde in Zusammenhang mit der „neuen Mathematik" bzw. der „Mengenlehre" in den 70er-Jahren heftig und ausgesprochen kritisch diskutiert.[13] Letztlich führte die damals berechtigte Kritik an der formalen und wirklichkeitsfremden Umsetzung der Mengenlehre in die komplette Ablehnung des Ansatzes und der dazu entwickelten Materialien durch die Kultusministerkonferenz. Diese Ablehnung wurde in seltener Einigkeit von allen damaligen politischen Parteien befürwortet und mit großer Erleichterung auf Seiten der Schulen und der Elternhäuser zur Kenntnis genommen.

Dennoch sind die Autorinnen der Überzeugung, dass die „Logischen Blöcke" für die Förderung aller, auch der entwicklungsverzögerten Kinder - nicht nur im Fach Mathematik, sondern vor allem im Bereich der Sprache - wertvolle Anregungen bieten können. Dabei soll jedoch kein erneuter Vorstoß geleistet werden, eine falsch verstandene, formale „Mengenlehre" durch eine Hintertür wieder in den Mathematikunterricht einzuführen. Darum muss sicherlich im Einzelfall entschieden werden, ob und welche Aktivitäten im Unterricht oder der Förderung eingesetzt werden sollen. Gitterspiele, Spiele zum Bilden von einer, zwei und mehr Mengen, wie sie in 9.8, 9.9 und 9.10 beschrieben werden, können sehr formal wirken und sind nicht unbedingt empfehlenswert. Sie wurden dennoch aufgenommen, der Vollständigkeit halber und aus einem historischen Interesse heraus. Das gilt auch für die in 9.11 aufgeführten Logikspiele. Die Erfahrung, die Studierende mit dem dort beschriebenen „Hexenspiel" gemacht haben, zeigt jedoch, dass gerade hier Kinder mit viel Eifer und Interesse arbeiten, wenn die Aufgabenstellungen ihrem Entwicklungsstand angepasst wurden.

9.1 Logische Blöcke von Z. P. Dienes

Dienes ging davon aus, dass für 4- bis 6-jährige Kinder die Eigenschaften **Form, Größe und Farbe** besser zugänglich sind als die beiden Merkmale der Stärke „dick" und „dünn". Seine „Merkmalklötze" bestehen darum aus 48 Bausteinen: 12 von jeder Form, 24 von jeder Größe und Stärke, von jeder Farbe 16. Das heißt, jeder Klotz kann durch die Angabe von vier Eigenschaften eindeutig beschrieben werden: **Form, Farbe, Größe und Stärke (Dicke)**.

Die Eigenschaften der Merkmalklötze können durch Symbole auf Merkmalkärtchen dargestellt werden. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass eine Übertragung von der konkret erlebten Erfahrungswelt in symbolische Darstellungen möglich wird. Das bedeutet, Kinder erleben den Symbolcharakter ab-

---

[12] Zur Diskussion um die „Neue Mathematik" und die „Mengenlehre" wurde bereits an anderer Stelle auf einen Artikel von 1974 aus dem „Spiegel" verwiesen. Diesen können interessierte Leser und Leserinnen herunterladen unter http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784469.html (10/2014).

[13] *„Nicht angezweifelt wird der Nutzen der ‚Logischen Blöcke', die auf Dienes zurückgehen, für die logische Schulung der Sechsjährigen. Diese ‚Merkmalsklötze' können in spielerischen Situationen und sehr abwechslungsreich den Unterricht beleben. Aber weshalb spricht man von der ‚Menge aller Klötze, die rot sind', statt schlicht ‚die roten Klötze' zu sagen? Die Feststellung, daß es in dem Material keinen braunen Klotz gibt, kann man freilich auch so ausdrücken: ‚Die Menge aller braunen Klötze ist die leere Menge.' Warum einfach, wenn es umständlich geht?"* (Die ZEIT, 19. Mai 1972; http://www.zeit.de/1972/20/logik-durch-rote-kloetze).

strahierter Darstellungen und erfahren, dass Symbole Informationen verdichten und „gelesen“ werden können. Anhand symbolischer Darstellungen, welche abstrakter sind als die gesprochene Sprache, wird ein Rückgriff auf konkrete Objekte möglich bzw. können Vorstellungen und innere Bilder aufgebaut werden.

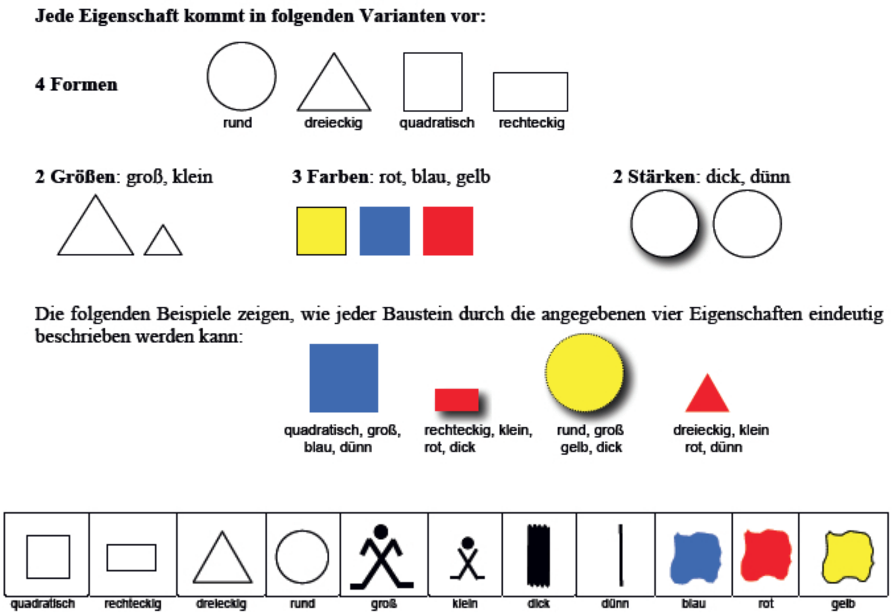


Abb. 39: Eigenschaften der Merkmalsklötze und Merkmalskärtchen

9.2 Vorbereitende Spiele

a) Freies Spiel

Vor dem „gelenktem Spiel“ mittels vorgegebener Regeln *„muss die freie Auseinandersetzung mit dem Material stehen“* (Freund & Sorger 1973, 25). Für eine Vierergruppe wird bei den meisten Spielen ein ganzer Kasten mit 48 Merkmalklötzen bereit gestellt. Das Verteilen der Klötze soll von den Kindern selbst geregelt werden. Kinder sollten sich daran gewöhnen, selbstständig kreativ und erfinderisch zu werden, indem sie entweder *„selbst etwas erfinden oder Abwandlungen der Figuren anderer Kinder wagen“* (ebd.).

Der Differenzierungsgrad der Gebilde und Figuren liefert wichtige Informationen:

- Treffen die Kinder beim Legen bzw. Bauen eine gezielte Auswahl?
- Stellen die Kinder ihre Figuren bzw. Bilder nach selbst gewählten Regeln her, die sie im Gesamtbild durchhalten?
- Spielt eine Eigenschaft der Klötze eine dominante Rolle oder werden verschiedene Eigenschaften gleichzeitig berücksichtigt?

- Nutzen die Kinder Eigenschaften der Logischen Blöcke, indem sie ihnen eine Funktion im Bild zuordnen?

Wie lange sollen die Kinder frei mit den Logischen Blöcken spielen?

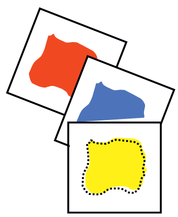
Freund und Sorger plädieren dafür, die freie Spielphase nicht allzu sehr auszudehnen, damit keine Materialmüdigkeit entsteht. Andere Autoren, zum Beispiel Kothe, sehen das anders und würden erst abbrechen, wenn die Kinder Zeichen von Unlust zeigen.

b) Namenspiele

Wir geben den Klötzen Namen: Für das gemeinsame Spiel ist ein eindeutiges Benennen der Eigenschaften der Klötze notwendig. Kinder finden häufig selbst kreative, treffende Bezeichnungen. ‚Gib mir den platten Klotz, der so spitz ist! Ja, den gelben, großen Klotz!' Die vom Kind gemeinten Eigenschaften des bezeichneten Klotzes im Beispiel sind: dünn, dreieckig, gelb, groß. (Kothe 1968, 13). Die Wörter für die Eigenschaften dick, dünn, groß, klein sowie die Farbbezeichnungen gelb, blau, rot, stehen den meisten Kindern bereits zur Verfügung. Neu sind die Namen für die Formen (dreieckig, rund, rechteckig, quadratisch).

> *Es kommt bei diesen einführenden Spielen nur darauf an, mit den Merkmalen der Klötze vertraut zu werden. Die Regeln des Merkmalwechsels lenken den Blick auf Gliederungsgesichtspunkte, die im bisherigen Leben der Kinder keine oder nur geringe Bedeutung hatten. Wir müssen uns dessen bewusst sein, dass wir hier völlig neue Erlebnisse provozieren, für die eine anders geartete Phantasie erst geweckt werden muss. Diese Erziehung verlangt Geduld und Einfühlungsvermögen bei den Erwachsenen. Die Phantasie der Kinder wird von anderen, erregenden Erlebnissen bestimmt: Sprechen wir von einer Schlange, dann darf uns nicht wundern, dass Erlebnisse vom Zoo in Erinnerung gebracht werden. So legte ein kleiner Junge (4;8 Jahre) konsequent zu jeder Schlange mit einigen Klötzen ein Haus: ‚Hier wohnt die Schlange'.*
>
> *Mathematische Erlebnisse hat ein Kind in seiner natürlichen Umwelt im allgemeinen nicht. Wir müssen ihm Spielsituationen verschaffen, die auch solche Erlebnisse ermöglichen. Ein Kind lernt das Sprechen, weil es nachzuahmen versucht, was es hört. Sprache entwickelt sich aus einem langen Differenzierungsprozess in ganz natürlichen sozialen Situationen. Auf für die Entfaltung mathematischen Denkens bedarf es zunächst einer Vielfalt von Angeboten, die das Kind in spezieller Weise herausfordern und anregen. Unsere Spiele sind wesentlicher Teil dieser intellektuellen Erziehung. (Kothe 1968, 17f.)*

1. Farbmerkmale



Alle roten Klötze werden herausgesucht (16 Stück). Neben den Haufen wird ein Merkmalkärtchen gelegt, auf das ein roter Klecks gemalt wird. Anschließend werden die restlichen Klötze in zwei Haufen geordnet (blaue und gelbe) und ebenfalls mit einem Merkmalkärtchen versehen.

Spiel: Wir sortieren nach den Farben

Alle Klötze liegen auf einem Haufen. Jeder holt sich einen roten Klotz und legt ihn auf den mit dem roten Merkmalkärtchen bezeichneten Platz. Welche Klötze bleiben übrig? *„Vielleicht nennen Kinder nicht die Farbmerkmale, sondern beispielsweise eine Form (rund). Dann zeigen wir, dass im Haufen der roten Klötze das angesprochene Merkmal (rund) auch zu finden ist und deshalb nicht gemeint sein kann. Es ist eine geistige Leistung, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen. Wichtig und charakteristisch für die Restmenge ist die Farbe“* (Kothe 1968, 14).

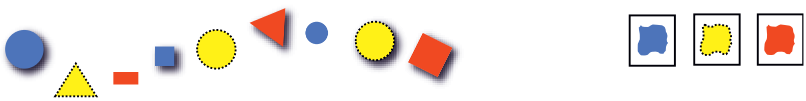
Spiel: Wir legen eine bunte Schlange

Ein Erwachsener legt aus Klötzen eine Reihe aus Klötzen. Er nennt das Gebilde ohne weitere Erläuterungen eine Schlange und fragt, was an der Schlange auffällt.

> *‚Das ist eine zahme Schlange', ‚Sie kann nicht wegkriechen.' Die Kinder werden viele Aussagen machen. Wird der Farbwechsel von den Kindern nicht erkannt, muss das Denken auf der Ebene des Tun aktiviert werden: Baut auch so wie ich! Einige Kinder legen die Schlange Klotz für Klotz nach. Vielleicht gibt es einige, die das Prinzip des Farbwechsels selbstständig aufgreifen und nicht nur genau nachlegen. Jetzt vergleichen wir. Hat ein Kind mehrere gleichfarbige Klötze hintereinander gelegt, treten Unterschiede auf. Die Kinder sehen die Regel selbständig ein: ‚Hier ist es nicht so wie bei mir.'* **Vergleichen und Unterscheiden als Grundfunktionen des Geistes müssen gepflegt werden.**
>
> *Wer entdeckt und formuliert den Sachverhalt? Ein dicker, großer runder Klotz ist der Kopf der Schlange. Es ist eine ganz besondere Schlange, denn ständig wechselt beim Anlegen der Klötze die Farbe. Niemals dürfen zwei gleichfarbige Klötze hintereinander liegen. Welchen Klotz muss ich hinter den gelben Klotz legen? Muss es ein roter Klotz sein? Darf es auch ein blauer Klotz sein? Es gibt immer zwei Möglichkeiten, den nächsten Klotz anzulegen. Das sollen die Kinder erkennen.* (a.a.O., 15f.)

Spiel: Die Musterschlange

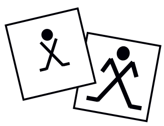
Klötze werden so (oder ähnlich) ausgelegt:



„*Vielleicht erkennen Kinder die genau eingehaltene Farbfolge (b-g-r-b-g-r). Wir legen neben diese* Schlange die Farbkärtchen, um die Farbfolge noch in anderer Art bewusst zu machen".

Sechs Muster für die Farbschlange: Bei jeder Schlange soll der Kopf eine andere Farbe bekommen. Ein Kind bestimmt mit den drei Farbkärtchen das Muster, nach dem die übrigen Kinder die Schlange legen müssen. Insgesamt gibt es sechs unterschiedliche Kombinationen (g-b-r; g-r-b; b-g-r; b-r-g; r-b-g; r-g-b).

2. Merkmale der Größe



Wir suchen alle großen Klötze heraus (24 Stück). Was bleibt übrig?

Symbole für die Merkmale groß und klein sind die beiden Strichmännchen. Das kleine Männchen hebt die Arme. Es möchte getragen werden.

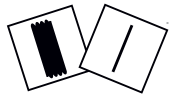
Spiel: Wir ordnen nach der Größe

Die Kinder suchen entweder zuerst alle großen oder alle kleinen Klötze heraus. Die entsprechend anderen Klötze bleiben übrig. Die Verneinung ist hier nicht problematisch: Nicht-klein ist groß, nicht-groß ist klein. Merkmalkärtchen zu den Negationen werden erst bei fortgeschrittenen Spielen verwendet.

Spiel: Groß-klein-Schlange

Eine Schlange, bei der ständig die Größe wechselt, wird gelegt.

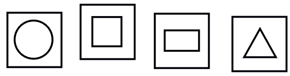
3. Merkmale der Stärke (Dicke)



Es wird analog zu den Merkmalen der Größe vorgegangen. Die Merkmalkärtchen werden mit einem dünnen und einem dicken Strich versehen. Der dicke Strich darf nicht mit dem Symbol für „rechteckig" verwechselt werden. Die Formen werden darum später durch ihre Umrisse symbolisiert.

Spiele analog zu den Spielen oben: Wir sortieren; Die Dick-dünn-Schlange

4. Merkmale der Form



In der Geometrie spielen bestimmte Grundtypen eine besondere Rolle. Bei den Klötzen kommen vier Grundtypen vor; ihre Namen *(rund, dreieckig, quadratisch, rechteckig)* werden verbindlich eingeführt. Gezählt werden nur die Ecken, die auf dem Tisch aufliegen (der dreieckige Klotz hat eigentlich sechs Ecken!). Entsprechende Gegenstände werden in der Umwelt, im Kindergarten, dem Klassenzimmer, dem Elternhaus, auf dem Spielplatz etc., gesucht.

Vieldeutigkeit ist in folgender Weise nützlich. Trotz ihres geringen Wortschatzes kommen die Kinder selten in Verlegenheit, etwas treffend zu benennen. Diese sprachschöpferischen Leistungen beachten wir gebührend. Für unsere Spiele ist es notwendig, neue Wörter zu verwenden, die nicht zum normalen Wortschatz des Kindes gehören. Es wäre falsch, für eine begrenzte Zeit kindertümliche Ausdrücke beizubehalten. Für Autos und bekannte Markenartikel benutzen Kleinkinder die Fachnamen auch dann, wenn sie anfangs schwer auszusprechen sind. Den geometrischen Formen geben wir in unseren Spielen auch Fachnamen, weil sie für uns bedeutsam werden. (…) Wem das Aussprechen Schwierigkeiten bereitet, kann trotzdem immer mitspielen, denn wir haben ja noch unsere schriftlichen Symbole, die wir mit schwarzer Farbe als Umrisse zeichnen. (Kothe 1968, 20).

Spiel: Wir ordnen nach den Formen

Schlangenspiele analog zu den Spielen bei 1. bis 3. (Wechsel der Formen ohne bzw. mit vorgeschriebener Reihenfolge.

Spiel: Wer spielt aus?

> Gespielt wird zu viert. Jedes Kind hat alle Klötze einer Form (Dreiecke, Quadrate, Kreise oder Rechtecke) vor sich liegen. Ein Kind legt den Kopf der Schlange. Die anderen Kinder legen reihum weiter. Dadurch, dass jedes Kind eine Form besitzt, ergibt sich die Regel des Legens von selbst (Beispiel: dreieckig – rund – quadratisch – rechteckig – dreieckig – rund – …). Dieses Spiel kann dadurch erweitert werden, dass ein fünftes Kind an den Tisch geholt wird, das herausfinden soll, welches Kind als nächstes an der Reihe ist. Gefordert ist also ein Blick auf die bisher gelegte Schlange und die bei den Kindern noch verbliebenen Klötze. Außerdem muss der Drehsinn beachtet werden (wurde im oder gegen den Uhrzeigersinn gelegt?).

Spiel: Welche Merkmale hat dieser Klotz?

> Die Kinder sollen selbst erkennen, dass jeder Klotz durch genau vier Merkmale bestimmt wird. Kinder, die mit den Wörtern „Merkmal" oder „Eigenschaft" nichts anfangen können, bevorzugen den konkreten Bezug: Zu jedem Klotz gehören vier Kärtchen. (Kothe 1968, 22).

Ein Klotz wird hochgehalten und gefragt, welche Eigenschaften (Merkmale) er hat. Es müssen vier Merkmale genannt werden. Wenn die Kinder Schwierigkeiten haben, können alle 11 Merkmalkärtchen der Reihe nach durchprobiert werden: *Ist er dick? Ist er groß?* … Was passt, wird neben den Klotz gelegt, die anderen Kärtchen werden zurück auf den Stapel gelegt.

Spiel: Der verhüllte Klotz

Ein Klotz wird mit einem Tuch verhüllt oder in einen Beutel gesteckt, so dass nichts von ihm zu sehen ist. Wie kann man nun feststellen, welche Merkmale der Klotz hat? Er darf befühlt werden. So kann man die Eigenschaften Form, Größe und Dicke ertasten. Die Farbe ist zu erfragen. Geantwortet wird mit *ja* oder *nein*. Vielleicht wird die richtige Farbe gleich beim ersten Mal erraten. Falls nicht, gibt es zwei Möglichkeiten. Die zweite Frage gibt aber auf jeden Fall Gewissheit über die Farbe: Wird sie bejaht, ist die Farbe ohnehin klar. Wird sie verneint, *„fragen Kinder auch noch nach der dritten Farbe. Warum fragst du? Ist diese Frage notwendig? Wenn der Klotz nicht rot und nicht blau ist, muss er gelb sein. Bei drei Alternativen führen höchstens zwei Fragen zum gültigen Fall. Das wird hier im Spiel erfahren." (Kothe 1968, 22).*

Spiel: Welcher Klotz gehört zu diesen vier Kärtchen?

Zu vier Kärtchen den entsprechenden Klotz herauszusuchen, ist nicht einfach. Dazu ist es sinnvoll, die Klötze geordnet hinzulegen, damit sie leicht gefunden werden können. Wie ist hier Ordnung zu schaffen? „Wer seine Gedanken auf das Spiel konzentriert, merkt bald, dass die vier Kärtchen nicht gedankenlos ausgewählt werden dürfen. Die Merkmalgruppen Form, Farbe, Größe und Dicke müssen Beachtung finden. (…) Wer vier passende Kärtchen ohne Schwierigkeiten findet, der praktiziert das, was wir subsumieren nennen. Er ordnet Begriffe nach Oberbegriffen richtig ein. Diese beachtlichen Leistungen werden in der Ebene des konkreten Handelns erreicht. Sie zeigen die Bedeutung der Spiele mit den Klötzen für die Herausforderung eines Denkens, das im Ansatz der sprachlichen Formulierung nicht bedarf (a.a.O., 23).

9.3 Auslegespiele

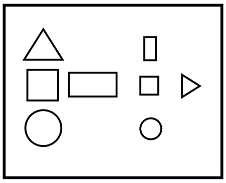
Lernziele: Die Kinder können

- Merkmalklötze in die vorgegebenen Umrisse einpassen. Sie erkennen, dass dreidimensionale Körper zweidimensional als ebene Figuren abgebildet (symbolisiert) werden können.
- den Umrissen entnehmen, ob dicke oder dünne Klötze gemeint sind. Dabei müssen sie bereits zwei Merkmale beachten, nämlich Form und Stärke.
- sich bei der Reihenfolge des Aufeinanderlegens von dem Turm bzw. den Farbkärtchen/Farbstreifen leiten lassen (das heißt sie beachten symbolische Hinweise und setzen sie in ihrem Handeln um).
- Gewinn- oder Hilfsstrategien entwickeln (das bedeutet, sie erwerben die Fähigkeit, vorausschauend zielgerichtet und planend vorzugehen).

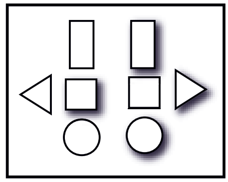
Vorbereitung:

Spiel 1) Pläne belegen

Plan A. Material: alle *dünnen* Klötze (24).



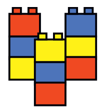
Plan B. Material: alle *großen* Klötze (24).



Spielregeln: Vier Spieler, jeder erhält 6 Klötze. Der Reihe nach darf jedes Kind einen Baustein auf den Plan legen. Liegt bereits ein Baustein auf dem entsprechenden Feld, dürfen weitere passende Bausteine darauf gestapelt werden.

Im Vorspiel „Pläne belegen" geht es lediglich darum, dass die Kinder zu ihren Bausteinen die entsprechenden Umrisse auf den Plänen entdecken können. Die Pläne sind so angelegt, dass Abstände zwischen den Umrissformen vorgesehen sind, um das Einpassen von

Bausteinen zu erleichtern, falls der Plan bereits mit einigen Bausteinen belegt ist. Dies sollte beachtet werden, falls man sich selbst analoge Pläne herstellt. Das Vorspiel ‚Pläne belegen' sollte sicher beherrscht werden, bevor das Drei-Etagen-Spiel begonnen wird.



Drei-Etagen-Spiel (Strategiespiel)

Material: Spielplan A oder B, Logische Blöcke, Farbkärtchen in drei Farben oder farbige Plättchen, Legosteine o.ä.

Spielregeln: Nach dem Verteilen der Bausteine (wie in Spiel 1), wird willkürlich ein farbiger Turm (oder drei Farbkärtchen etc.) gewählt und auf den Plan gestellt. Die Klötze müssen jetzt in der Reihenfolge aufeinander gestapelt werden, die durch die gewählte Farbfolge festgelegt ist. Sieger ist das Kind, das seine Steine den Regeln nach ablegen konnte.

9.4 Nachbauen

Lernziele

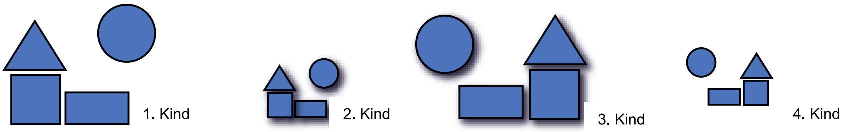
Die Kinder können

- sich entschließen, eine Figur zu bauen
- eine gebaute Figur nachbauen und dabei möglichst viele Feinheiten in der gegenseitigen Lage der Klötze berücksichtigen
- sich gegenseitig berichtigen.

Spiel: Gleiche Farbe

Material: alle Klötze einer Farbe (16)

Spielverlauf: Klötze in vier Häufchen je 4 Steine anordnen (Nr. 1: alle kleinen, dicken; Nr. 2: alle kleinen, dünnen; usw.). Jedes Kind sucht sich einen Haufen aus. Das erste Kind baut aus seinen Steinen eine Figur. Die anderen Spieler bauen anschließend die Figur aus ihren Steinen entsprechend nach. Werden sie spiegelbildlich nachgebaut, ist dies keine Fehlleistung!



Der Schwierigkeitsgrad des Nachbauens ist für die drei Mitspieler verschieden hoch. Wird die Figur, wie im Beispiel, aus den großen, dünnen Klötzen gebaut, so muss ein Mitspieler (Kind 4) von groß nach klein umschalten, die Dicke bleibt bei ihm erhalten. Ein zweiter Mitspieler muss von dünn auf dick umdenken (Kind 3), während die Größe erhalten bleibt. Das ist die leichteste Aufgabe. Der dritte Spieler (Kind 2) muss sowohl die Größe als auch die Stärke verändern und hat die schwerste Aufgabe. Damit die verschieden schweren Umdenkanforderungen für die Kinder wechseln, behält jedes Kind immer dieselben Klötze, aber es denkt sich jedes Mal ein anderes Kind eine Figur aus. (a.a.O., 37).

Spiel: Gleiche Form - Partnerspiel

Material: alle 12 logischen Blöcke einer Form

Spielverlauf: Jedes der beiden Kinder erhält 6 Klötze, eines die dicken, eines die dünnen (Alternativ: eines die großen, eines die kleinen Klötze).

Das erste Kind legt eine möglichst schöne Figur, das zweite baut sie nach und achtet darauf, dass Farbfolge, Abstände, Symmetrie etc. erhalten bleiben. Dann baut das zweite Kind eine Figur, die vom ersten nachgebaut wird, usw.

Spiel: Topf und Deckel

Material: alle logischen Blöcke

Spielverlauf: Die dicken Klötze werden am Boden verteilt. Die Kinder sitzen rundherum. Ein Kind zeigt auf einen der am Boden liegenden Steine und spricht dazu: *„Der Topf muss zu, der Topf muss zu, den Deckel sucht …“*, wobei es den Namen eines anderen Kindes nennt. Dieses Kind muss nun den dünnen Baustein als Deckel suchen, der in allen anderen Merkmalen (Form, Größe und Farbe) mit dem gezeigten Baustein übereinstimmt. Nun darf es selbst zu einem Baustein den „Deckel“ suchen lassen.

Variation: die kleinen Bausteine dienen als Deckel der großen Steine; die roten dienen als Deckel der blauen Steine etc.

Lernziele

- Gedächtnisschulung
- Entwickeln geeigneter Gedächtnishilfen, die es erleichtern, sich mehrere Elemente zu merken, indem man sich gewisse auffällige Gesetzmäßigkeiten einzuprägen versucht.

Entscheidend ist nun, dass wir derartige Gedächtnishilfen nicht „lehren“, sondern dass wir durch geeignete Aufgabenstellungen den Kindern die Chance geben, solche Hilfen selbst zu entdecken. Man wird beobachten, dass Kinder bei der Aufforderung, sich vor dem Verstecken die Figur zu merken, zu murmeln beginnen, wobei sie ganz offensichtlich Versprachlichungen als Gedächtnishilfen aufbauen. Damit die Kinder nicht verbal überfordert werden, sollen sie den vermissten Gegenstand nicht beschreiben müssen, sie sollen ihn vorzeigen können. Wir lassen also auch die nicht eingesetzten Klötze auf dem Tisch (die Grundmenge). Das Verstecken eines Gegenstandes wird dann so vor sich gehen, dass wir ihn einfach unter die restlichen Elemente mischen. Aus diesen kann er dann von den Kindern herausgesucht und vorgezeigt werden. (Freund & Sorger 1973, 50).

Spiel 1: Einer wird versteckt (Kurzzeitgedächtnis)

Material: kleine bzw. dünne logische Blöcke

Spielverlauf: Drei bis vier Bausteine werden von den anderen deutlich getrennt auf die Unterlage gelegt. Die Kinder sollen sich diese Steine genau merken. Anschließend sollen sie die Augen schließen, ein Kind „versteckt“ einen der Bausteine, indem es ihn unter die restlichen Steine mischt. Ein darunter gelegtes Papierstück kennzeichnet den „versteckten“ Stein eindeutig. Wer findet ihn?

Spiel 2: Die vertauschte Figur (Kurzzeitgedächtnis)

Material: Logische Blöcke

Spielverlauf: Ein Kind legt eine gegenständliche Figur oder ein Muster. Alle anderen Kinder betrachten die Figur und prägen sie sich ein. Anschließend schließen die Kinder ihre Augen. Ein anderes Kind darf nun zwei Steine vertauschen. Daruntergelegte Papierstücke markieren die Steine eindeutig. Wer findet heraus, welche Steine vertauscht wurden?

Spiel 3: Umgedrehte Bilder (Langzeitgedächtnis)

Material: Bilder mit gemalten Figuren aus logischen Blöcken; Logische Blöcke

Spielverlauf: Das Bild wird den Kindern gezeigt und danach umgedreht. Dann soll das Bild mit den Bausteinen nachgelegt werden. Die entstandenen Figuren werden mit dem Bild verglichen und korrigiert. Am Ende des Vormittags sollen die Kinder die Figur erneut legen, ohne dass ihnen diesmal das Bild gezeigt wird.

Die Zeitabstände können jetzt ausgedehnt werden. So können die Kinder zum Beispiel dieselbe Aufgabe am nächsten Tag erhalten oder, wenn sie die Figur bereits einige Male nachgelegt hatten, einige Tage später. Eine weitere Steigerung des Schwierigkeitsgrades kann man dadurch erreichen, dass nicht nur ein Bild zur Auswahl steht, sondern mehrere Bilder, die auf der Rückseite durch Zeichen (Sonne, Mond, Stern) gekennzeichnet sind. Die Aufgabe könnte dann so lauten: ‚Wir wollen heute das Mondbild bauen‘. Nach jedem Legen der Figur sollte mit dem Bild verglichen und Fehler korrigiert werden. (Freund & Sorger 1973, 51f.).

9.6 Schlangenspiele (Wiederholte Reihen)

Alle Schlangenspiele, die bereits in I vorgestellt wurden, können hier gespielt werden. Außerdem:

Spiel 1: Die Schlange

Aus den Merkmalkärtchen werden zwei bis drei (maximal 4) ausgewählt.

Spiel 2: Je Spieler eine Form

Material: Logische Blöcke einer Größe, Merkmalkärtchen der Farben (rot, blau und gelb)

Spielverlauf: Jedes Kind bekommt Bausteine einer Form. Die Merkmalkärtchen werden gemischt und aufgedeckt. Die durch die Farbkärtchen festgelegte Schlange wird im Reihumverfahren gelegt.

Spiel 3: Steinewahl für die Schlange (Strategiespiel für vier Spieler)

Material: Ein Kasten Logische Blöcke, Merkmalkärtchen der Farben rot, blau und gelb

Spielverlauf: Die Merkmalkärtchen werden gemischt und aufgedeckt. Danach wählen die Kinder ihre Steine selbst aus, indem sie im Reihumverfahren in mehreren Runden immer zwei Klötze aus dem Vorrat nehmen dürfen. Im Anschluss an die Steinewahl wird **die Schlange gelegt.**

Spiel 4: Die vertauschte Schlange

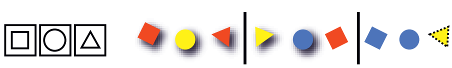
Material: Ein Kasten Logische Blöcke, und ein Satz Merkmalkärtchen

Spielverlauf: Es werden zwei bis vier Merkmalkärtchen gemischt und aufgedeckt. Anschließend wird eine entsprechende Reihe von den Kindern gelegt. Danach schließen drei Kinder ihre Augen oder drehen sich um, während das vierte zwei Bausteine der Schlange vertauscht. Das Kind, das als erstes den „Fehler" bemerkt, darf das nächste Mal zwei Steine vertauschen.

Lernziel: Die Kinder erkennen in einer Folge einen Fehler und können die Vertauschung rückgängig machen, das heißt die Folge fehlerfrei wiederherstellen.

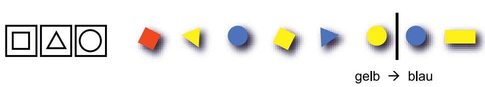
Häufig auftretende Fehler beim Schlangenlegen

Spiegelbildliches Weiterbauen nach einem Zykel



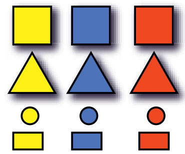
Die Steine des Dreier- oder Viererzykels werden zwar verwendet, aber es wird nicht auf die Reihenfolge geachtet.

„Unterwegs" wird die Aufgabenstellung – bedingt durch die zufällige Lage einiger Steine – verändert.



9.7 Weitere Spiele zum Reihen legen und Klassifizieren

Lernziele zu den Spielen 1 bis 3: Die Kinder können



- jedem Merkmalkärtchen einen Baustein zuordnen,
- jedem Baustein ein passendes Merkmalkärtchen zuordnen
- sich Merkmale einprägen und diese bei der Auswahl des nächsten Bausteins berücksichtigen.

Spiel 1: Kärtchen schenk mir einen Klotz

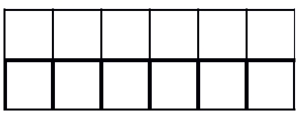
Material: Ein Satz mit Merkmalkärtchen. 12 Bausteine, die so ausgewählt sind, dass jede Farbe 4-mal, jede Form 3-mal, jede Größe und Dicke 6-mal vorkommen.

Spielverlauf: Die Merkmalkärtchen werden verdecktet gestapelt in die Mitte des Tisches gelegt, die Bausteine liegen darum herum. Ein Kind wählt sich einen Baustein und deckt das oberste Kärtchen vom Stapel auf. Baustein und Merkmal werden verglichen. Besitzt der Baustein das vom Kärtchen vorgegebene Merkmal, so bekommt ihn der Spieler „geschenkt", darf ihn also behalten. Passen Baustein und Kärtchen nicht zusammen, muss der Stein zurückgelegt werden. Das jeweilige Kärtchen wird auf einem Ablagestapel offen abgelegt. Ist der Ausgangsstapel verbraucht, werden die Kärtchen gemischt und zum Weiterspielen verwendet. Wer hat am Ende die meisten Klötze?

Variante: Die Kärtchen werden nicht auf einem Stapel abgelegt, sonder offen nebeneinander gelegt. Dann ist ein Spielen nach Strategien möglich).

Spiel 2: Bausteine wandern vor und zurück (Strategiespiel)

Material: Ein Satz Merkmalkärtchen, eventuell zur Erleichterung für jedes Kind einen Spielplan mit 2x6 quadratischen Feldern, die so groß sind, dass ein Klotz in ein Feld passt. Ein Kasten Logische Blöcke.



Spielverlauf: In drei Runden wählt jeder Mitspieler je zwei Bausteine und legt sie in eine Reihe vor sich (in die umrandete Zeile des Spielplans). Ein Spieler deckt ein Merkmalkärtchen auf und legt es auf einen Ablagestapel offen hin. Dann darf er einen seiner Bausteine, der das aufgedeckte Merkmal besitzt, in die zweite Reihe schieben (obere Reihe des Spielplans). Hat er keinen geeigneten Stein, kommt der nächste Spieler dran. Sind bei einem Spieler alle Klötze in der oberen Reihe angekommen, kann er sie ab der nächsten Runde entsprechend zurück wandern lassen.

Spiel 3: Merkmalkärtchen wandern vor und zurück (Strategiespiel, Umkehrung von Spiel 2)

Material: Ein undurchsichtiges Säckchen, in das die Bausteine eines Satzes passen. Ein Satz Merkmalkärtchen, eventuell zur Erleichterung für jedes Kind einen Spielplan mit 2x6 quadratischen Feldern, die so groß sind, dass ein Merkmalkärtchen in ein Feld passt. Ein Kasten Logische Blöcke.

Spielverlauf: Die Merkmalkärtchen werden an die Mitspieler verteilt und in eine Reihe vor sich gelegt (in die umrandete Zeile des Spielplans). Das gefüllte Säckchen wird reihum gegeben. Jeder

Spieler greift sich einen Baustein heraus. Hat er ein Kärtchen, das eine Eigenschaft des gewählten Bausteins besitzt, darf er es in die obere Reihe schieben. Der Baustein kommt in das Säckchen zurück.

9.8 Zusammengesetzte Merkmale betrachten

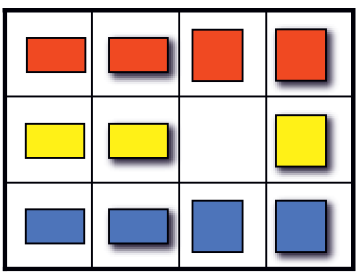
Gitterspiele (Matrixspiele)

Material: Für *Gitter- bzw. Matrixspiele* werden Pläne benötigt, die nach bestimmten Regeln mit Merkmalklötzen ausgelegt werden.

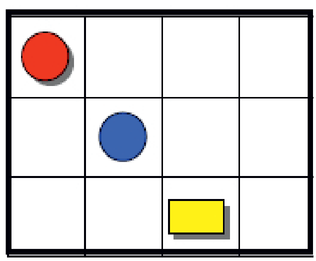
Spielverlauf: Es kommt dann darauf an, die verschiedenen Gitter nach vorgegebenen oder frei gewählten Ordnungen auszulegen. Jedes Gitter besteht aus einer bestimmten Anzahl von Quadraten (8 x 8 cm Kantenlänge). Folgende Gitter sollten vorbereitet werden: Nr. 1: 3 x 3, Nr. 2: 4 x 4, Nr. 3: 5 x 5, Nr. 4: 6 x 6, Nr. 5: 6 x 3.

Die Gitterspiele sind eine Weiterführung der Schlangenspiele bzw. des Kettenlegens, mit dem Unterschied, dass nicht mehr nur eine einfache Sequenz betrachtet und fortgeführt wird, sondern zwei und mehr Reihen untereinander gelegt werden, die ähnliche Gesetzmäßigkeiten wie die erste Reihe aufweisen Reihe aufweisen. Die Reihen haben außerdem jetzt eine durch das Gitter (die „Matrix") festgelegte Länge. Für das Vorgehen empfiehlt Neunzig (1972, 54) folgendes Vorgehen:

1. Den Kindern wird ein vollständig ausgelegtes Gitter vorgelegt, sie legen die Anordnung mit ihren Klötzen in ein anderes Gitter (mit gleicher Aufteilung) nach. *„Durch das Nachlegen lernen sie die Gesetzmäßigkeiten kennen und prägen sie sich vielleicht ein. Aufgeweckte Kinder brauchen bald auch nicht mehr auf die Vorlage zu sehen, wenn sie die Ordnung der Reihen erkannt haben".*
2. Die Gitter sind nur teilweise ausgelegt, die Aufgabe der Kinder besteht darin, die fehlenden Klötze zu finden und einzupassen. Anfangs sollten nur eins, dann wenige Felder freigelassen werden. Mit zunehmender Vertrautheit können immer mehr Felder freigelassen werden.
3. Die Kinder wählen Gitter und Material selbst, sie ordnen die einzelnen Klötze nach einer selbst gewählten Ordnung in die Felder ein. Andere Kinder können nun aufgefordert werden, die Ordnung zu erkennen oder auch, „Lücken" zu schließen.



Zwei Beispiele mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad für unvollständig belegte 3x4-Gitter.

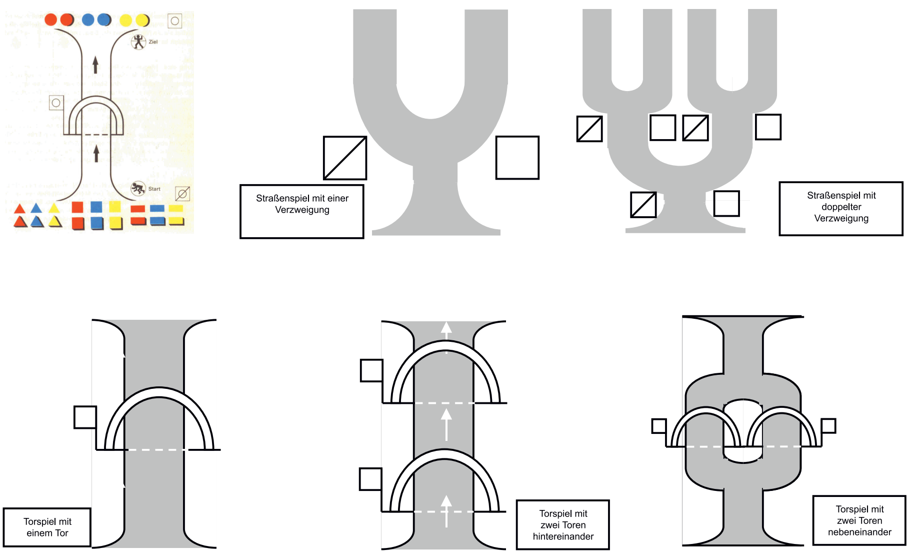


Klassifizieren nach einem oder mehreren Merkmalen

1. Tor- und Straßenspiele

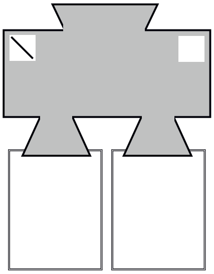
Für *Tor- und Straßenspiele* werden Spielpläne angefertigt mit einem oder mehreren Toren, mit oder ohne Verzweigungen. Ziel dieser Spiele ist das Klassifizieren nach einem oder mehreren Merkmalen (Mengenbildung). Beispiele für Spielpläne sind unten aufgeführt.

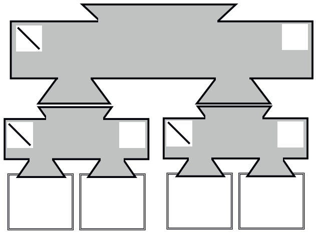
Ein einfaches **Torspiel** besteht aus einer aufgezeichneten Straße mit einem Tor, an das ein Eigenschaftskärtchen gelegt wird. Es gibt an, welche Klötze durch das Tor dürfen. So entsteht hinter dem Tor eine Menge von Klötzen, die die vorgeschriebene Eigenschaft besitzen. Vor dem Tor bleiben alle Klötze liegen, die diese Eigenschaft *nicht* besitzen. Neunzig (1972, 87) schlägt vor, zum Einführen des Spiels das Torspiel mit den Kindern konkret handelnd durchzuführen, indem auf den Boden eine Straße aufgezeichnet wird und mit Stühlen o.ä. Tore gebaut werden. *Wurde eine Eigenschaft gewählt und das zugehörige Kärtchen am Tor befestigt, dürfen alle Kinder mit dieser Eigenschaft durch das Tor.* Im Anschluss daran kann mit farbigen Spielzeugautos oder ähnlichem Material gespielt werden, bevor schließlich nur noch die Merkmalklötze eingesetzt werden.



2. „Sortiermaschine“

Eine weitere Möglichkeit, Mengen nach bestimmten Eigenschaften zu bilden, stellen die „Sortiermaschinen“ dar (einfach oder hintereinander geschaltet). Mit ihnen wird wiederum nach einem oder mehreren Merkmalen klassifiziert (sortiert, geordnet), man erhält Menge und „Rest“, im Fachjargon Ergänzungsmenge (Komplementärmenge) genannt.

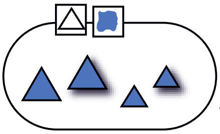


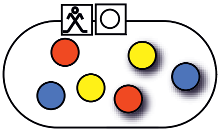


9.10 Bilden von zwei und mehr Mengen

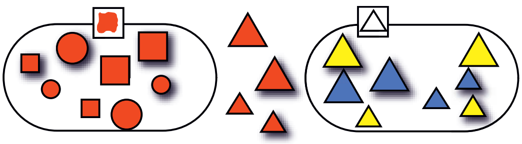
Für das Bilden von zwei und mehr Mengen sind Torspiele mit mindestens zwei Toren, mehrfach verzweigte Straßenspiele, Spiele mit hintereinander geschachtelten Sortiermaschinen sowie Spiele mit Reifen oder Seilen bzw. Seil-Darstellungen gut geeignet. Besonders bei letzteren tritt das zu lösende Problem deutlich hervor, da hier keine dynamisch-sequenzielle Lösung gefragt ist, sondern die Mengen statisch dargestellt werden.

Das Seil oder Reifen bei der konkreten Menge und die geschlossene Linie bei der flächenhaften Darstellung sind Symbole für die Mengenbildung, das heißt dafür, dass irgendwelche Dinge zu einer Menge (Klasse) zusammengefasst werden. Begonnen wird mit der Seil-Darstellung („Venn-Diagramm) einer einfachen Menge (nach einem oder zwei Merkmalen): **alle dreieckigen blauen Klötze, alle großen runden Klötze**

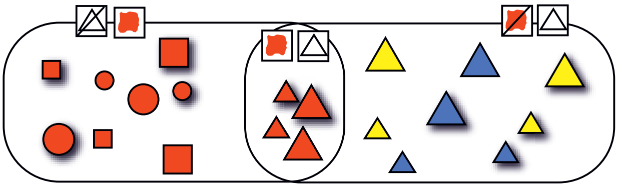




Anschließend kann man folgendermaßen vorgehen. Es werden zwei Reifen auf dem Boden platziert, neben denen je ein Merkmalkärtchen liegt.



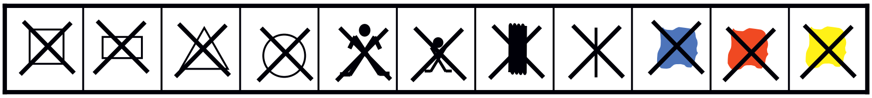
Die dreieckigen roten Klötze nehmen insofern eine Sonderstellung ein, dass sie beide Eigenschaften besitzen (rot, dreieckig), also nicht in einen der Reifen zugeordnet werden können. Wenn die Kinder sie in einem der beiden Reifen platziert haben, wird nachgefragt, ob alle Bausteine richtig gelegt wurden. *„Auf diese Weise stoßen sie darauf, dass in der zweiten Menge Bausteine fehlen."* Werden die Klötze daraufhin in den anderen Reifen gelegt, fehlen sie im ersten. So entsteht ein echtes Dilemma. Manchmal schlagen die Kinder deshalb vor, die Steine zwischen beiden Reifen zu platzieren, aber das ist auch keine Lösung, denn jetzt sind beide Mengen nicht vollständig. Deshalb fordern wir die Kinder auf, eine Lösung zu finden, in der beide Mengen richtig gelegt sind. Dazu muss man beide Reifen teilweise übereinander legen, so dass die dreieckigen, roten Klötze im überschnittenen Teil liegen können. So liegen sie gleichzeitig in dem Reifen, der alle dreieckigen Klötze enthält und außerdem auch in dem Reifen, der alle roten Klötze enthält. Mathematisch gesehen bilden die dreieckigen, roten Klötze im überschnittenen Teil die Schnittmenge aus allen roten und allen dreieckigen Klötzen. Links davon im ersten Reifen liegen die roten und nicht dreieckigen Bausteine, rechts davon die dreieckigen, die nicht rot sind. Außerhalb beider Reifen bleiben alle Klötze übrig, die nicht dreieckig und nicht rot sind. Die verneinte Eigenschaft wird durch einen Schrägstrich gekennzeichnet.



Analog zum Bilden zweier Mengen kann auch mit drei Reifen gearbeitet werden.

9.11 Logikspiele

Für diese Spiele wird zusätzlich zu den vorhanden Merkmalkärtchen ein Satz mit Negationen hergestellt.



1. Spiel: Das Hexenhaus

Material: Ein Kasten Logische Blöcke, 6 bzw. 9 ausgewählte Merkmalkärtchen, Spielplan „Hexenhaus".

Spielverlauf

Phase 1: Die Spielführerin erzählt:

Es war einmal eine böse Hexe. Alle Kinder, die sie einfangen konnte, verzauberte sie in Klötze und steckte sie in ihr Hexenhaus. Hier sehr ihr das Hexenhaus und die verzauberten Kinder (zeigt den Spielplan, auf dem die Klötze im Inneren des Hauses stehen). Große Kinder hat die Fee in große Klötze verzaubert, kleine Kinder wurden zu kleinen Klötzen. Kinder, die etwas Rotes anhatten, sind jetzt rote Klötze, Kinder mit gelben oder blauen Kleidern sind jetzt gelbe oder blaue Klötze geworden. Die Kinder sind sehr traurig, weil sie verzaubert und eingesperrt wurden. Sie versuchen, über die Mauer zu steigen – aber das geht nicht, die ist auch verzaubert. Da plötzlich sehen sie draußen eine gute Fee.

Sie bringt Zauberteppiche mit. Auf dem ersten ist ein roter Klotz gezeichnet. Die gute Fee legt ihn über eine Seite der Mauer und ruft den Kindern zu: Über diesen Teppich dürfen alle Kinder herauslaufen, die in rote Klötze verzaubert wurden. Über den zweiten Teppich, den sie über die Mauer wirft, können alle Kinder entkommen, die die Fee in dicke Klötze verzaubert hat. Die Fee hat noch einen Teppich mitgebracht. Damit können alle Kinder entkommen, die quadratisch sind. Ihr sollt euch jetzt jedes Mal, wenn ihr an der Reihe seid, einen Klotz suchen, und ihr sollt ihm helfen, über einen der Teppiche zu fliehen.

Im Reihumverfahren dürfen die Kinder je einen Klotz über einen Teppich fliehen lassen, dessen Eigenschaft vom Teppich angegeben wird. Sie versuchen, möglichst vielen Kindern zur Flucht zu verhelfen.

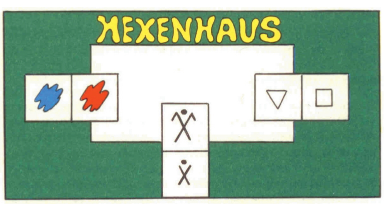
Phase 2: Die Erzählung wird fortgesetzt.

Die böse Hexe kommt zurück und wird fürchterlich wütend, weil einige Kinder aus dem Gefängnis herauskonnten. Zuerst einmal steckt sie alle Kinder in das Hexenhaus zurück. Sie kann aber die Teppiche nicht wegnehmen. Dafür denkt sie sich etwas ganz Böses aus. Sie holt nämlich auch Teppiche und legt diese vor die der guten Fee. Nun müssen die Kinder über zwei Teppiche laufen, wenn sie fliehen wollen. Vor dem Teppich mit „rot“ legt sie einen Teppich mit „blau“. Nun kann kein Kind mehr über den Teppich darüberlaufen, denn wenn es über den ersten Teppich darf, dann kann es nicht mehr über den zweiten – und die Kinder, die über den zweiten Teppich laufen könnten, kommen gar nicht erst bis da hin. Genauso sperrt sie alle anderen Wege ab. Vor den Teppich mit „dick“ legt sie einen Klotz mit „dünn“. Und vor den Teppich mit „quadratisch“ legt sie einfach einen Teppich mit „rund“. Versucht mal, ob ihr noch Kinder findet, die jetzt fliehen können.

Spielhandlung: Die Kinder prüfen nach, ob es noch Kinder gibt, die über die Teppiche entkommen können.

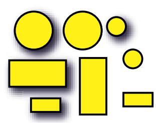
Kaum ist aber die böse Hexe wieder fort, kommt die gute Fee zu den traurigen Kindern zurück. Sie hat genau gesehen, was die Hexe getan hat – und schon hat sie einen guten Einfall. „Wenn man zwei Teppiche gegeneinander austauscht“, so sagt sie, „dann bleiben immer noch zwei vor jedem Tor, und die Hexe wird nicht merken, dass etwas verändert wurde!“ Sie tauscht ganz schnell zwei Teppiche aus und schon können wieder einige Kinder entfliehen. Welche wohl?

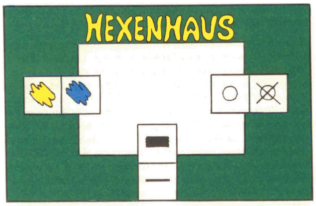
Spielhandlung: Die Kinder versuchen, Klötzen das „Entkommen“ zu ermöglichen. Sie vertauschen anschließend die Teppiche wiederum, bis so viele Kinder wie möglich entkommen können.



1. Situation bei der 3. Spielhandlung.

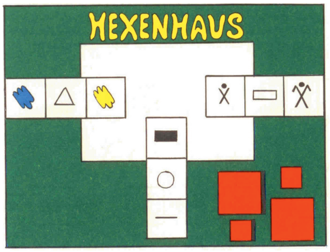
Am Ende im Hexenhaus verbleibende Bausteine





2. Situation bei der 3. Spielhandlung.

Bereits durch das Vertauschen der vier Kärtchen, die nicht Farbkärtchen sind, erreicht man, dass alle Bausteine „entkommen können".

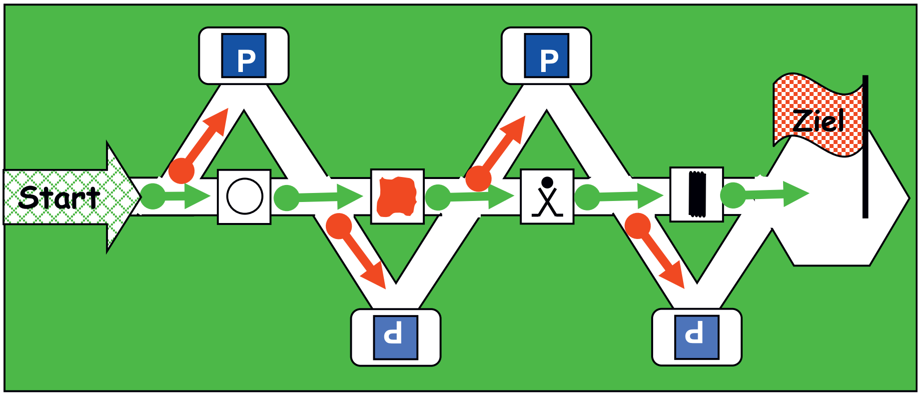


2. Hier hatte die böse Hexe gleich 2 Teppiche gelegt. (Nach den ersten Teppichen konnten noch Kinder entkommen!).

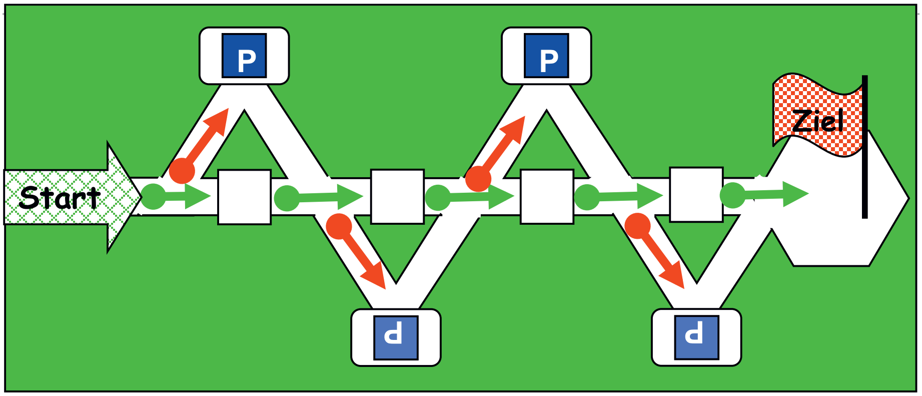
Die roten Quadrate bleiben eingesperrt. .

2. Spiel: Umwegspiel

Material: Ein Kasten Logische Blöcke, ein Satz Merkmalkärtchen, Spielplan.



Spielverlauf: Beim Umwegspiel handelt es sich um ein Strategiespiel. Die Bausteine werden auf den Tisch neben den Spielplan gelegt. Ein Kind zieht vier Merkmalkärtchen und legt sie auf die Felder des Plans. Jedes Kind nimmt einen Baustein, den es für geeignet hält. Im Reihumverfahren darf es ihn jeweils ein Feld weiterschieben – direkt über ein Merkmalkärtchen, falls der Baustein die auf dem Kärtchen geforderte Eigenschaft besitzt (Richtung grüner Pfeil) – über die Parkplätze, falls er die Eigenschaft der Merkmalkärtchen nicht besitzt (Richtung roter Pfeil). Der Weg über den Parkplatz bedeutet einen Umweg, da zwei Schritte (= 2 Runden) benötigt werden, um dasselbe Feld zu erreichen, das über die Kärtchen mit einem Zug erreicht wird. Gelingt es einem Kind, seinen Baustein ans Ziel zu bringen, so darf es ihn behalten und einen neuen wählen. Gewonnen hat, wer zuerst drei Steine ins Ziel bringt. Bei manchen Kombinationen von Merkmalkärtchen gibt es nur einen Klotz, der über alle Kärtchen laufen darf, zum Beispiel im oberen Spiel.



3. Spiel: Zwanzig Fragen-Spiel

Material: Ein Satz Merkmalkärtchen, ein Kasten Logische Blöcke, ein Säckchen.

Spielverlauf: Die Klötze sind im Sack. Ein Spieler zieht verdeckt einen Klotz, ohne zu sagen, um welchen es sich handelt. Die anderen Kinder dürfen nun Fragen stellen. Ist er rot? Ist er blau? Ist er groß? usw.. Derjenige, der den Klotz kennt, antwortet immer mit JA oder NEIN. Jedes Mal wenn eine Frage gestellt und eine Antwort gegeben wurde, wird das entsprechende Merkmalkärtchen auf den Tisch gelegt. „Man wird zunächst die Erfahrung machen, dass Kinder viel zu viele Fragen stellen. Mit anderen Worten, sie nutzen die vorhandenen Erfahrungen nicht voll aus. Dies sollte jedoch zugelassen werden. Wenn z. B. zuerst die Frage ‚Ist er groß' gestellt wird und ‚groß' auf den Tisch kommt, so mag ein anderes Kind trotzdem fragen: ‚Ist er klein?'. In diesem Fall kommt auch ‚nicht klein' auf den Tisch. Es wird nicht unbedingt erkannt, dass ‚groß' ‚nicht klein' oder dass ‚nicht klein' ‚groß' impliziert, einfach deshalb, weil jeder Klotz entweder groß oder klein ist." (Dienes & Golding 1971, 40f.).

10. Literatur

Fritz, A.; Ricken, G. & Schmidt, S. (2003). Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim und Basel: Beltz.

Gaidoschik, M. (2007). Rechenschwäche vorbeugen. Das Handbuch für Lehrerinnen und Eltern. 1. Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. Wien: Öbv-hpt.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt: Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Freiburg: Pädagogische Hochschule. ph-fr.bsz-bw.de/files/16/gerster.pdf (10.10.14).

Jansen, P. (2008). Das Zählen üben. Zählkompetenzen sind die Grundlage für mathematisches Verständnis. In: Grundschule 10, S. 44f.

Krajewski, K. (2008). Vorschulische Förderung bei beeinträchtigter Entwicklung mathematischer Kompetenzen. In: Borchert, J.; Hartke, B. & Jogschies, P. (Hrsg.). Frühe Förderung entwicklungsauffälliger Kinder und Jugendlicher. Stuttgart: Kohlhammer.

Naumann-Kipper, P. (2008). 3, 2, 1 - viele, wenig, keins? Zahlen, Mengen und Muster entdecken. 2. Auflage. Freiburg: Herder.

Nestle, W. (1999). Arbeitsmittel und Spiele im elementaren Mathematikunterricht. Reutlingen: Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.

Lorenz, J. H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig: Westermann.

Neubert, B. & Weigel, J. (2014). Warum PLUS nicht immer zusammen bedeutet. Verständnis für Rechenoperationen entwickeln. In: Grundschulunterricht Mathematik; Heft 1/2014.

Oerter, L. & Montada, R. (Hrsg.) (1998). Entwicklungspsychologie. 4. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz.

Padberg, F. (3. Aufl. 2005 und neuer): Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg u.a.: Springer oder Elsevier, überarbeitete und erweiterte Auflage.

Peter-Koop, A. & Rottmann, Th. (2013). Einsicht in Teil-Ganzes-Beziehungen. Übungen mit den „Zahlenfreunden". www.-foerdermagazin.de (04/2013), Grundschule.

Radatz, H.; Schipper, W.; Ebeling, A. & Dröge, R. (1996). Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Resnick, L.; Lesgold, S. & Bill, V. (1990). From protoquantities to number sense. Paper presented at the Psychology of Mathematics Education Conference (Mexico, July 1990). files.eric.ed.gov/fulltext/ED335420.pdf (06.03.2014)

Ruf, U. & Gallin, P. (1995). Sprache und Mathematik. 1.-3. Schuljahr. Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Zürich: Interkantonale Lehrmittelzentrale/Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Schäfer, J. (2014). „… dass es nützlich für die Zukunft ist." Mathematische Früherziehung bei sozial benachteiligten Kindern mit Entwicklungs- und Lernproblemen. In: Sonderpädagogische Förderung heute. 59. Jg, Heft 1; 8-18.

Schäfer, J. (2009). Rechenschwäche in den Eingangsklassen der Sekundarstufe - oder: Was abgebrannte Streichhölzer mit Mathematik zu tun haben. In: Verband Dyslexie Schweiz. 13. Tagung des Verbandes Dyslexie Schweiz: Dyskalkulie. Ansätze zu Diagnostik und Förderung in einer integrativen Schule. S. 41-52.

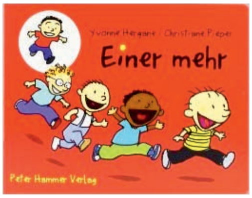
Schmidt, S. (2003). Arithmetische Kenntnisse am Schulanfang. Befunde aus mathematikdidaktischer Sicht. In: Fritz, A.; Ricken, G. & Schmidt, S.: Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim und Basel: Beltz, 26-47.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990). Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1, Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.

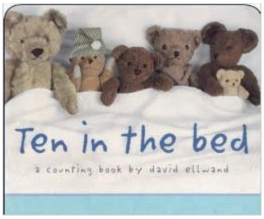
Bilderbücher

Kinder begegnen Mathematik - Das Bilderbuch. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich. Mit Bildern von Corinne Schroff. www.lehrmittelverlag.com



„Einer mehr“ von Yvonne Hergane und Christiane Pieper

„Fünfter sein“ von Norman Jünger und Ernst Jandl



„Ten in the bed“. von David Ellwand (in englischer Sprache)

Nützliche Links

- atlasmathe.ch
- PiK AS: Kooperationsprojekt zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe: http://pikas.dzlm.de/
- KiRa - Kinder rechnen anders: http://kira.dzlm.de/
- mathebus.de: Materialien zum Selbstkostenpreis erstellt und vertreibt Walter Feigl, der frühere Rektor der Hasenbergschule Stuttgart, zum Beispiel Photos mit Mengenbildern zu Früchten und Eiern.
- lernsoftware-mathematik.de
- http://mathelandschaft.blogspot.de/p/material.html

Aster, M. G., von (2005). Wie kommen Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen. In: Aster, M. G., von & Lorenz, J. H. (Hg.). Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. S. 13-33.

Aster, M. G., von & Lorenz, J. H. (Hg.) (2005). Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Baroody, A. J.; Bajwa, N. & Eiland, M. (2009). Why Can't Johnny Remember The Basic Facts? In: Developmental Disabilities. Research Reviews 15: 69-79.

Baroody, A. J. & Dowker, A. (Ed.) (2003). The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise. Mahwah, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum.

Borchert, J.; Hartke, B. & Jogschies, P. (Hrsg.) (2008). Frühe Förderung entwicklungsauffälliger Kinder und Jugendlicher. Stuttgart: Kohlhammer.

Clarke, B. & Robins, J. (2006). Numeracy Enacted: Preschools Families Conceptions of Their Children's Engagement of Numeracy. http://www.researchgate.net/publication/239927069_Numeracy_Enacted_Preschool_Families_Conceptions_of_Their_Children%27s_Engagements_with_Numeracy/links/00b49529696e9dfd3b000000 (10.10.2014)

Dornheim, D. (2008). Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche. Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten. Berlin: Logos-Verlag.

Fischer, B. & Schäfer, J. (2002). Die Entwicklung der Simultanerfassung bei Rechenschwäche. In: Akzente 3/2002, S. 50-52.

Flexer, R. J. (1986). The Power of Five: The Step before the Power of Ten. Arithmetic Teacher, 33 (11), S. 5-9.

Franz, A. (2014). „Ich habe am Strand 5 Muscheln gefunden und mein Bruder 6 ..." Mit Rechengeschichten Alltagsbezüge und Grunderfahrungen der Operationen bei Kindern eines ersten Schuljahres vertiefen. In: Grundschulunterricht Mathematik, Heft 1/2014.

Freesemann, O. & Breuer, Th. (2014). Förderung flexibler Übersetzungsprozesse. In: Grundschulunterricht Mathematik. Heft 1/2014.

Fthenakis, W. E.; Schmitt, A.; Daut, M.; Eitel, A. & Wendell, A. (Hrsg.) (2009). Natur-Wissen schaffen. Band 2: Frühe mathematische Bildung. Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Fuchs, L. S.; Fuchs, D. & Compton, D. (2012). The Early Prevention of Mathematics Difficulty. Its Power and Limitations. In: Journal for Learning Disabilities 2012, May; 45 (3). S. 257-269.

Fuson, K. C. (1988). Children's Counting and Concepts of Number. New York: Springer. Daraus: Kap. 2: The Number-Word Sequence: An Overview of Ist Acquisition and Elaboration.

Gast, H. (1954). Zur Frage der Mengenunterscheidung bei drei- bis achtjährigen Kindern. In: Zeitschrift für Psychologie, 157; S. 1-90.

Gast, H. (1957). Der Umgang mit Zahlen und Zahlgebilden in der frühen Kindheit. In: Zeitschrift für Psychologie, 161; S. 106-138.

Gasteiger, H. (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster u.a.: Waxmann.

Gerster, H.-D. (2003). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In: Fritz, A. et al.: Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim, Basel und Berlin: Beltz. S. 201-221.

Ginsburg, H. & Opper, S. (1978). Piagets Theorie der geistigen Entwicklung. 2. Auflage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Greenspan, S. I. & Shanker, S. G. (2007). Der erste Gedanke. Frühkindliche Kommunikation und die Evolution menschlichen Denkens. Weinheim und Basel: Beltz.

Grube, Dietmar; Krajewski, Kristin (2007). Auf Wunsch des Autorenteams wird dieser Beitrag wie folgt zitiert: Vorläuferkompetenzen von mathematischem Denken. Wissen & Wachsen, Schwerpunktthema Mathematik & mathematische Förderung, Wissen. Verfügbar über: http://www.wissen-und-wachsen.de/page_mathematik.aspx?Page=6d56dbe4-84f4-4f21-bfae-a39f0e781522 [26.09.2008]. (10.10.2014).

Hellmich, F. (2007). Möglichkeiten der Förderung mathematischer Vorläuferfertigkeiten im vorschulischen Bereich. In: Bildungsforschung 4, Ausgabe 1. http://www.bildungsforschung.org/index.php/bildungsforschung/article/viewFile/61/64 (10.10.2014).

Hoenisch, N. & Niggemeyer, E. (2007). Mathekings. Junge Kinder fassen Mathematik an. Berlin: Verlag das Netz.

Huinker, D. M. (1992). Effects of Instruction Using Part-Whole Concepts with One-Step and Two-Step Word Problems. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (San Francisco, CA, April 20-24, 1992).

Jakob, E. (2004). Pränumerische Förderung. Schenkendorfschule (Förderschule) Freiburg. Unveröffentlichtes Manuskript.

Keller, B. & Müller Noelle, B. (Hrsg.). Kinder begegnen Mathematik. Zusammenhänge erkennen. Zürich: Lehrmittelverlag Zürich.

Kieber, S. (2002). Simultanerfassung von Anzahlen bei Vorschulkindern. Pädagogische Hochschule Freiburg: Wissenschaftliche Hausarbeit. Freiburg. Unveröffentlicht.

Krajewski, K. (2006). Früherkennung und Prävention von Rechenschwierigkeiten im Vorschulalter. Tagungsband „Mathematische Förderung im Kindergarten und in der Schule" des Verbandes Dyslexie Schweiz. Brüten: Verband Dyslexie Schweiz.

Krajewski, K.; Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2009). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Beginn der Grundschulzeit. In: Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.). Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Münster: Waxmann.

Krajewski, K.; Schneider, W. & Nieding, G. (2008). Zur Bedeutung von Arbeitsgedächtnis, Intelligenz, phonologischer Bewusstheit und früher Mengen-Zahlen-Kompetenz beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 55, 100-113.

Kühnel, J. (1966). Neubau des Rechenunterrichts. Ein Handbuch der Pädagogik für ein Sondergebiet. 11. Auflage. (1. Auflage 1916). Bad Heilbronn: Klinkhardt.

Jordan, N. C. & Levine, S. C. (2009). Socioeconomic Variation, Number Competence, and Mathematics Learning Difficulties in Young Children. Developmental Disabilities Research Reviews 15: S. 60-68.

Landerl, K. & Kaufmann, L. (2013). Dyskalkulie. Modelle, Diagnostik, Intervention. 2., aktualisierte Auflage. München und Basel: Ernst Reinhardt.

Langhorst, P. (2013). Tragfähige arithmetische Fähigkeiten beim Erwerb des Rechnen Lernens und Möglichkeiten der vorschulischen Förderung. Universität Duisburg-Essen.

Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (2009). Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm. Stuttgart: Klett.

Peucker, S. & Weißhaupt, S. (2005). FEZ - Ein Programm zur Förderung mathematischen Vorwissens im Vorschulalter. In: Zeitschrift für Heilpädagogik 56, S. 300-305.

Rechtsteiner-Merz, Ch. (2012). Die Schulung des Zahlenblicks in Klasse 1 - Gut, wenn man einen Blick dafür hat. In: Landesinstitut für Schulentwicklung Baden-Württemberg (Hrsg.). Förderung gestalten. Modul B: Besondere Schwierigkeiten in Mathematik. Stuttgart. S. 85-100.

Resnick, L. B. (1989). Developing Mathematical Knowledge. In: American Psychologist. Vol. 44, No. 2, S. 162-169.

Resnick, L. B. (1984). A Developmental Theory of Number Understanding. Reprinted by permission from Ginsburg, H. (Ed.). The development of mathematical thinking. Academic Press.

Resnick, L. B.; Lesgold, Sh. & Bill, V. (1990). From Protoquantities to Number Sense. files.eric.ed.gov/fulltext/ED335420.pdf (10.10.2014).

Schäfer, J. (2013): „Die gehören doch zur Fünf!" Teil-Ganzes-Verständnis und seine Bedeutung für die Entwicklung mathematischen Verständnisses. In: Sprenger, J.; Wagner, A. & Zimmermann, M. (Hrsg.) (2013). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Wiesbaden: Springer. S. 79-97.

Schäfer, J. (2005). Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Eine empirische Studie. Hamburg: Kovac.

Sophian, C. & Mc Corgray, P. (1994). Part-Whole Knowledge and Early Arithmetic Problem Solving. In: Cognition and Instruction, 1994; 12(1); S. 3-33.

Sprenger, J.; Wagner, A. & Zimmermann, M. (Hrsg.) (2013). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Wiesbaden: Springer.

Thompson, Ch. S. (1984). Let's Do It: The Power of 10. Arithmetic Teacher. Nov. 1984, S. 6-11.

Treacy, K. & Willis, S. (2003). A Model of Early Number Development. http://www.merga.net.au/documents/RR_treacy.pdf (10.10.2014).

Van de Walle, J. (2004). Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally. Boston u.a.: Pearson. Kapitel 9: Developing Early Number Concepts and Number Sense.

Weber, N. (2011). Prävention von Rechenstörungen - erste Rechenfertigkeiten im elementaren Bereich - diagnostizieren und fördern. Pädagogische Hochschule Ludwigsburg: Wissenschaftliche Hausarbeit an der Fakultät für Sonderpädagogik. Reutlingen. Unveröffentlicht.

Weißhaupt, S.; Peucker, S. & Wirtz, M. (2006). Diagnose mathematischen Vorwissens und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht 53, S. 236-245.

Diagnostik

Behörde für Bildung und Sport der Freien und Hansestadt Hamburg (2003). Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule. Handreichung mit Kopiervorlagen. http://bildungsserver.hamburg.de/contentblob/3871818/data/beob.pdf (10.10.2014).

Berner Screening Mathematik. Screening zum Erfassen von Schülerinnen und Schülern mit schwachen Mathematikleistungen. von E. Moser Opitz, L. Reuser und D. Berger. Klasse 1, 2 und 3. Jeweils mit Manual, Protokollbogen und Testheft. www.erz.be.ch/besmath (10.10.2014).

Der aktuelle Lernstand Mathematik. Saarland: Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft (Hrsg.). o.J. Kutzer, Krämer, Fries u.a. (o. J.). http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene_und_curriculare_materialien/grundschule/lernstandsanalyse/pdf_ilea1_reader/11._Der_aktuelle_Lernstand_Mathematik.pdf; basiert auf: Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten (Teil 1). Kutzer & Probst: Marburg.

Diagnose mathematischer Basiskompetenzen. Hoentges; Günther & Hellmich 2009.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2006). Rechenstörungen Diagnose und Förderbausteine. Kallmeyer.

Einzelscreening zum Übergang KiTa–Grundschule (Schäfer, J. o.J.; unveröff.).

Freiburger Screening zum Teile-Ganzes-Konzept: (LernberaterInnen Freiburg; unveröff.).

Materialien zur Förderung mathematischer Grundlagen für die mobile sonderpädagogische Hilfe (msH). Sonderpädagogisches Förderzentrum Erlangen. Dr. Werner Laschkowski, u.a. (o.J.). Zum Download unter: http://www.sfz-e.de/tz2/seiten/download/msdskript0_9.pdf. (10.10.2014 2014).

Steinbring, A. S. (o.J.). Lerndokumentation Mathematik. https://www.uni-bamberg.de/fileadmin/uni/fakultaeten/ppp_professuren/mathematik_informatik/Dateien/TransKiGS/Lerndokumentation_Mathematik_Anregungsmaterialien_gesamt_7.10.08.pdf (10.10.2014).

Van Luit, J. E. H.; van de Rijt, B. A. M. & Hasemann, K. (2001). OTZ (Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung). Hogrefe. Einzelverfahren, geeicht für 4;6 bis 7;6 Jahre).

Logische Blöcke

Freund, H. & Sorger, P. (1973). Denkspiele mit Pfiff. Junge Mathematik für die Eingangsstufe. Freiburg: Herder

Dienes, Z. P. & Golding, E. W. (1971). Mathematisches Denken und logische Spiele. Freiburg: Herder.

Kothe, S. (1968). Denken macht Spaß. Freiburg: Herder.

Neunzig, W. (1972). Mathematik im Vorschulalter. Freiburg: Herder.

Die deutschsprachige Literatur zu dem Material „Logische Blöcke“ erschien im Herder-Verlag. Die Bücher sind allerdings seit langem vergriffen und können nur noch über Antiquariate erworben werden.

Abbildungen

Abb. 6: Anregung zur Umsetzung rhythmischer Muster (aus Hoenisch und Niggmeyer 2007; mit freundlicher Genehmigung des Bildungsverlags 1: Berlin)

Abb. 7, 8, 9 und 11: Material zur Seriation und zur Stück-zu-Stück-Korrespondenz von E. Jakob (mit freundlicher Genehmigung von E. Jakob)

Abb. 10: Aufgabenkarten zur Mengenunterscheidung und dem Mengenvergleich

Abb. 12, 13 und 14: Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen nach Krajewski

Abb. 15: Gedicht (mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dipl. Math. Dieter Geering, Verantwortlicher der Website atlasmathe.ch)

Abb. 16 und 17: Material, das im Rahmen eines Tagespraktikums von Studentinnen erstellt wurde

Abb. 18: Kognitive Bedingungen für den Aufbau des Verständnisses von Zifferndarstellungen; Mengen-Früchte-Bild mit freundlicher Genehmigung von Walter Feigl (mathebus.de)

Abb. 19: Schreibrichtung und Bewegungsabläufe der Ziffern (aus: Bildungsplan für die Grundschule 1994, Baden-Württemberg, S. 229)

Abb. 20: Zahlenraum 10, bis 20 und darüber hinaus

Abb. 21: Triple-Code-Modell in Anlehnung an Dehaene (nach Schäfer 2005)

Abb. 22: Fördervorschläge, die aus dem Triple-Code-Modell abgeleitet wurden (aus Schäfer 2005)

Abb. 23: Freies Zeichnen von Zehnerfeldern (Schülerdokumente)

Abb. 24: Material zur Anzahlerfassung, das im Rahmen eines Tagespraktikums von Studentinnen erstellt wurde

Abb. 25: Vorlagen zum Spiel „Obstsalat“

Abb. 26: Entwicklungsmodell mathematischen Verständnisses nach Baroody et al. (2009)

Abb. 27: Anzahlen „mit den Augen vergleichen“

Abb. 28: Übungsvorschläge zum Anzahlvergleich nach van de Walle (2004)

Abb. 29: Ein Bilderbuch zum Anzahlvergleich (mit freundliche Genehmigung des Peter Hammer Verlags)

Abb. 30: Anregungen für die Förderung des Anzahlvergleichs

Abb. 31: Eierschachteln als Material zum Erarbeiten von Zehnerfeldern; private Fotografien

Abb. 32: Zahlzerlegungskasten nach Nestle (mit freundlicher Genehmigung des Autors)

Abb. 33: Beispiel für eine Arbeitsvorlage aus Nestle (mit freundlicher Genehmigung des Autors)

Abb. 34: Plättchen werfen

Abb. 35: Kleine Zehnerfelder als Vorlage für Spiele zur Anzahlerfassung

Abb. 36: Repräsentationen einer Sachaufgabe zum Subtrahieren

Abb. 37: Vom Konkreten zum Abstrakten

Abb. 38: Rechengeschichten zu Bildern erfinden

Abb. 39: Eigenschaften der Merkmalklötze und Merkmalkärtchen

Alle weiteren Abbildungen in Kap. 9 sind der Literatur zu Logischen Blöcken nachempfunden. Sie wurden nicht eigens nummeriert.

Sollten wir eine Abbildung nicht-autorisiert aus einem urheberrechtlich geschützten Werk übernommen haben, ist dies unabsichtlich geschehen. Dafür bitten wir bereits jetzt um Entschuldigung und um entsprechende Nachricht an jutta.schaefer@ph-ludwigsburg.de. Wir setzen uns dann umgehend mit Ihnen in Kontakt.

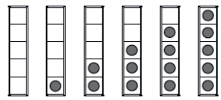
Materialliste für Klasse 1 und 2

Magnetisches Tafel- und Demonstrationsmaterial

Kopiervorlagen können angefordert werden bei Jutta Schäfer (jutta.schaefer@ph-ludwigsburg.de).

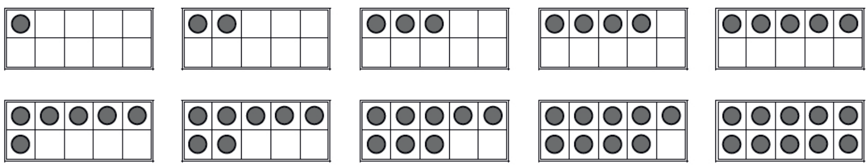
Außerdem werden benötigt: **HERMA Haft-Etiketten** Nr 2272 (rot, selbstklebend, 32 mm 400 Stück je Packung, pro Satz Zehnerkarten 55 Klebepunkte). Haftetiketten auf ausgedruckte Zehnerfelder aufkleben, ggf. laminieren und auf der Rückseite doppelseitiges Magnetklebeband anbringen.

Strukturierte Fünfer- und Zehnerfelder und Zehnerstreifen[14]

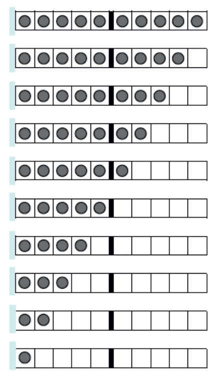


Zwei Sätze Fünferstreifen, gerne auch mit farblichen Untergliederungen (Zum Beispiel: 4 als 2 + 2 oder 3 + 1).

Je 2 Sätze große Zehnerkarten: linear in Beziehung zur Fünf (6 als 5 + 1, 8 als 5 + 3 usw.) und zu Verdoppelungen (6 als 3 + 3, 7 als 3 + 4 usw.)



Zwei Sätze Zehnerstreifen (Vorlage Abb. rechts)



Je zehn große „Farbige Streifen" (Japan Tiles) als magnetisches Material für die Tafel (Farbe in Analogie zu Cuisenairestäben): Einerquadrate (hell), Fünferstreifen (gelb) und Zehnerstreifen (orange). Der Unterschied zwischen den farbigen Streifen und Cuisenairestäben liegt in der Strukturierung der farbigen Streifen.

Außerdem

- Zwei große leere Zehnerfelder und magnetische Wendeplättchen (rot/blau; Durchmesser 4–5 cm)
- Dienes-Material (Zehnersystem-Material) aus Holz: Einerwürfel, Fünfer- und Zehnerstäbe
- Ein Satz Seguin-Karten, groß (Einer und Zehner)

---

[14] Zur Diskussion um unterschiedliche Modelle und Anschauungshilfen: Landerl und Kaufmann 2013, Kap. 5.1.3. Die Autorinnen vergleichen vorliegende Studien zu Effekten unterschiedlicher Anschauungshilfen und heben die Relevanz strukturierter, fünferbasierter Repräsentationen in frühen Erwerbsphasen hervor (S. 184f.).

Informationen für die Eltern

Ulrike Bopp-Schultheiß

Elterninformation für die Handreichung

Liebe Eltern,

wie können Sie Ihr Kind unterstützen, wenn Sie bemerken oder darauf aufmerksam gemacht wurden, dass Ihr Kind noch Unterstützungsbedarf im Bereich Voraussetzungen zum Mathematiklernen hat? Viele Alltagstätigkeiten und Spiele unterstützen Kinder beim Erlernen mathematischer Voraussetzungen. Häusliche Förderung sollte vor allem in den Bereichen Bewegungs- und Alltagserfahrung ansetzen.

Wichtige Lernimpulse gehen von folgenden Kinderaktivitäten aus:

- sich selbst und andere verkleiden,
- Puppen anziehen,
- Tisch decken,
- Kaufladenspiele, in denen Dinge sortiert, eingepackt und eingeräumt werden,
- Bastel- und Werkaufgaben, bei denen das räumliche Denken wichtig ist,
- Such- und Bewegungsspiele im Haus und im Freien, Ball- und andere Koordinationsspiele,
- Kochen einfacher Speisen nach kindgemäßen Rezepten,
- Familienspiele wie
    - Vier gewinnt
    - Mensch ärgere dich nicht
    - einfache Kartenspiele etc.

Bei der Bewältigung dieser Aufgaben spielen bestimmte Anforderungen eine Rolle, die für mathematisches Lernen grundlegend sind.

- Reihenfolgen müssen eingehalten werden,
- Stück-zu-Stück-Zuordnungen finden statt,
- Räumliche Bezüge werden erlebt, angewendet und dargestellt,
- Klassifikationen werden durchgeführt,
- Größenvorstellungen werden aufgebaut,
- Zeitliche Abfolgen sollen beachtet werden,
- Mengen- und Größenverhältnisse spielen eine Rolle,
- Die Lage des Körpers im Raum muss beachtet werden,
- Entfernungen spielen eine Rolle usw.

Wichtig ist, dass Felder aufgesucht werden, die für das einzelne Kind bedeutsam und interessant sind und in denen es deshalb mit höchstmöglichem Einsatz arbeitet.

Nicht hilfreich oder sogar schädlich sind stereotype Übungen, bei denen das Kind gezwungen wird, mit mathematischen Inhalten umzugehen, die es wegen fehlender Grunderfahrungen und Grundbegriffe nicht einordnen und verstehen kann. Ein solches Vorgehen bringt keinen Erfolg, es kann zu Motivationsverlust und sogar zu Leistungsverweigerungen führen. Wichtig ist für Kinder Freude an den Aufgaben, den Spielen und Alltagstätigkeiten.

Ihr Pädagogen-Team

Information zu Blitzblickübungen im Mathematikunterricht

Bei Blitzblickübungen werden strukturierte Mengendarstellungen (farbliche oder räumliche Strukturierung) so kurz gezeigt, dass das Abzählen nicht möglich ist. Dadurch fördern sie die simultane bzw. Quasi-Simultane Mengenerfassung und provozieren das mentale Zusammenfassen von Teilen. Beim Wahrnehmen der Teile und dem Zusammendenken zu einem Ganzen werden die Operationen vorbereitet.

Blitzblickübungen geben Hinweise zum Entwicklungsstand eines Kindes im Bereich Mengenerfassung und Zahlkonzept (das Denken des Kindes verstehen). Das Nennen der Zahl allein genügt nicht, wesentlich ist die anschließende Reflexion:

- Wie ist deine „6" (15, 69, …) zusammengebaut?
- Wie sieht deine „8" aus (zwei Vierer untereinander? Eine Fünf und noch eine Drei? …)
- Wie kannst du sicher sein, dass es „6" sind?
- Welche Zahlen verstecken sich noch in der „7"?

Für Blitzblickübungen eignen sich verschiedene Materialien:

- Punktekarten
- Würfelbilder
- Fingerbilder
- Eierschachteln
- Abaco-Geräte
- Zehnerfelder
- Geld u. v. m.

Blitzblickübungen sind auch in erweiterten Zahlenräumen sinnvoll, dabei sind dann beispielsweise

- Einerwürfel
- Fünfer- und Zehnerstangen
- Hunderterplatten sinnvoll.

Blitzblickübungen eignen sich für ein tägliches Ritual, denn die Kinder brauchen zum Aufbau klarer innerer Mengenbilder eine längere Zeit.

Wesentliche mathematische Erkenntnisse stellen sich nicht primär beim Hantieren mit einem Material ein, sondern beim anschließenden Reflektieren.

Am entstandenen Modell können die Teile, das Ganze und die Beziehungen diskutiert werden.

- Die Kinder rufen die Zahl im Chor, geeignet als Aufwärmphase. Dabei können unsichere Kinder im Schutz der Gruppe mitarbeiten.
- Die Lehrerin bietet einzelnen Kindern eine Aufgabe an und kann dabei differenzieren und ein einzelnes Kind beobachten.
- Die Kinder klatschen, hüpfen, tippen den Partner an, so oft, wie Punkte zu sehen waren.
- Die Kinder haben Ziffernkärtchen vor sich und wählen das passende aus / zeigen die Anzahl mit den Händen / drehen den Würfel auf die passende Seite.
- Die Kinder legen das „Muster" mit den Plättchen nach, setzen so viele Leute in den Bus, …
- Die Kinder erfinden Rechengeschichten, die Punkte verwandeln sich dabei in Frösche, Kinder, Goldstücke usw.

Wichtig ist nicht nur die Anzahl an sich,
sondern vor allem, wie jedes einzelne Kind
die Menge in ihren Teilen gesehen hat!

Blitzblickübungen können auch mit weiteren Aufgaben verknüpft werden:

- eins/zwei mehr (Stelle dir vor, ein Frosch kommt noch dazu gehüpft)
- eins/zwei weniger (Stelle dir vor, ein Luftballon platzt)
- Ergänzen zur 10, zur 20 (Wie viele Eier fehlen?)
- das Doppelte / die Hälfte
- …
- die wiederum mit den oben genannten Formen und Materialien durchgespielt werden können.

Wichtig ist, dass immer gefragt wird:
„Wie hast du das so schnell gesehen?"
„Wer hat es anders gesehen?" oder
„Könnte man es auch noch anders sehen?"

Liebe Eltern,

im Folgenden finden Sie einige Fragen aufgelistet, mit denen Sie die Blitzblickübungen anreichern oder erweitern können.

Es ist wichtig, dass die Kinder *mit ihren eigenen Worten* ausdrücken, wie sie die Zahlen gesehen haben und wie sie rechnen. So entstehen *innere Bilder von den Zahlen.*

Blitzblick mit Fünfer- oder Zehnerfeldern / später auch mit dem 20er-Feld

Fragen, die den Kindern gestellt werden können:

1. Wie viele … (z. B. Punkte) siehst du?
2. Wie hast du sie gesehen?
3. Wie viele fehlen bis 5? bis 10?
4. Wie viele fehlen bis 20?
5. Stelle dir vor: Es kommen 1 oder 2 dazu. Wie viele sind es jetzt?
6. Stelle dir vor: 1 oder 2 werden weggenommen. Wie viele sind es jetzt?
7. Wie viele sind es jetzt mehr als auf der letzten Karte?
8. Lege die Punkte mit Material nach.
9. Zeige die Punkte mit den Fingern (nicht zählen!)
10. Male die Punkte so, dass man schnell sieht, wie viele es sind.
11. Wie viel ist das Doppelte?
12. Wie viel ist die Hälfte?
13. Zwei Karten zeigen: Wie viele sind es zusammen? Wie hast du das gerechnet?
14. Zeige die passenden Zahlenkärtchen.
15. Schreibe die Zahl auf. Rechne +1, -1.
16. Wie kann die Zahl sonst noch aussehen? (6 als 5 + 1 oder 3 + 3).

Hinweise an Eltern, die ihre Kinder bei der Entwicklung der Zahlvorstellung und beim Rechnenlernen unterstützen möchten

Notwendigkeit von Material

Kinder, die noch Probleme haben, sich etwas vorzustellen, brauchen Anschauungsmaterial als Hilfe.

Innere Bilder schaffen!

Stell dir die Zahl vor …

Blitzblickübungen mit beliebigen Gegenständen

Kinder sollen ihren Rechenweg aufzeigen, erklären, aufmalen, darstellen.

Zeige du mir deinen Weg. Erkläre ihn.

Sage mir, was du (mit dem Material oder mit dem Kopf) getan hast.

Erkläre mir, warum du es so getan hast.

Spielerischer Umgang mit Mathematik

Diverse Gegenstände sortieren lassen (Farbe, Größe, Funktion, Muster, …)

Würfelspiele, Kniffel, Hausnummern würfeln,

Strategiespiele, Knobeleien, Denkspiele,

Rechenspiele, Memory, Schnipp Schnapp, …

Umweltbezüge mit Kindern schaffen und darüber nachdenken (reflektieren)

einkaufen, kochen, Uhr, …

Kinder in die Tätigkeiten einbeziehen,

ihnen Aufgaben und Eigenverantwortung zutrauen.

Das Denken zumuten!

Großes Zehnerfeld zur Demonstration an der Tafel

Maße: 25 cm (Tabelle mit Spaltenbreite und Zeilenhöhe je 5 cm, Linienstärke des Außenrahmens 6 pt, Mittelstreifen 4.5 pt, sonst 2.25 pt);

Kreisförmige Haftetiketten rot, selbstklebend, 32 mm Durchmesser.

Fünferfeld zur Demonstration an der Tafel

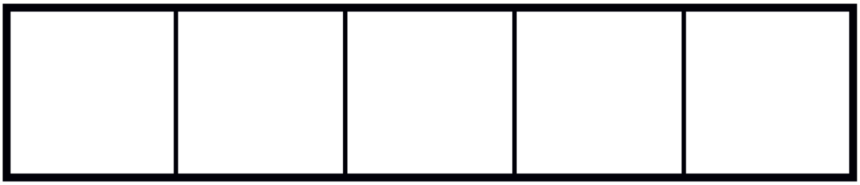
Tabelle erstellen mit Zeilenhöhe und Spaltenbreite jeweils 5 cm, Linienstärke des Außenrahmens 6 pt, sonst 2.25 pt);

Kreisförmige Haftetiketten rot und blau, selbstklebend, 32 mm.

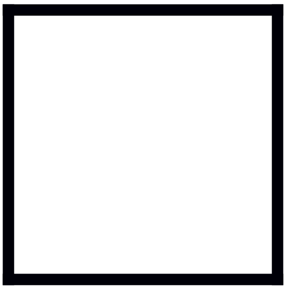
Die gleiche Vorlage kann auch verwendet werden zum Erstellen von Japan Tiles

Für **Zehnerstreifen** jeweils zwei Exemplare auf *orangefarbenes Papier* ausdrucken und der Länge nach aneinander kleben.

Für **Fünferstreifen** Streifen jeweils auf *gelbes Papier* ausdrucken.



Fünfer und Einer Demo-Version 5 cm



Vorlage für **Einer** in Originalgröße (5 x 5 cm, Rahmenstärke 6 pt).